

Огородова Л.В., Луповка Т.К.

Вычисление местной гравиметрической аномалии высоты
по дискретным измерениям силы тяжести

Методическое пособие
к выполнению самостоятельной работы
по курсам высшей геодезии и геодезической гравиметрии

Для магистров и студентов старших курсов геодезических специальностей

Москва 2011

I. МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ МЕСТНОЙ АНОМАЛИИ ВЫСОТЫ

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует принципиальная возможность определения нормальной высоты H' как разности спутниковой геодезической высоты H и аномалии высоты ζ

$$H' = H - \zeta \quad (1)$$

без выполнения геометрического нивелирования. Однако препятствием к практической реализации этого принципа является проблема вычисления аномалии высоты в любой точке Земли с точностью, соответствующей точности геометрического нивелирования.

Аномалию высоты получают или астрономо-геодезическим (геометрическим) или гравиметрическим методом [3, § 49]. В первом случае перестановкой H' и ζ в выражении (1) получается астрономо-геодезическая аномалия высоты ζ^{AG} , для вычисления которой служит формула

$$\zeta^{AG} = H - H'. \quad (2)$$

Этим путем получают наиболее точные значения аномалии высоты или их разностей, но только на тех нивелирных реперах, на которых выполнены спутниковые наблюдения.

Нормальная высота не зависит от выбора эллипсоида, поэтому формула (2) дает аномалии высоты относительно того эллипсоида, к которому относится вычисленная по спутниковым измерениям геодезическая высота H . Ныне таковыми являются эллипсоиды международных систем ГРС-80 и WGS-84, в России - эллипсоиды систем ПЗ-90 и ПЗ-90.02.

Гравиметрическая аномалия высоты связана с уровненным (общим земным) эллипсоидом, центр которого по определению находится в центре масс Земли и потенциал на поверхности которого тождественно равен потенциалу в начале счета нормальных высот. Эллипсоиды ГРС-80, WGS-84 и ПЗ-90 представляют практическую реализацию общего земного эллипсоида. Идеал недостижим и эти эллипсоиды отличаются от идеального общего земного. Вследствие этого астрономо-геодезическая и гравиметрическая аномалия высоты не совпадают; их отличие может составить десятые доли метра. Поэтому если в формуле (1) использовать вместо аномалии высоты (2) гравиметрическую аномалию высоты ошибка нормальной высоты также составит доли метра.

Гравиметрическую аномалию высоты получают по наземным измерениям силы тяжести, с помощью моделей гравитационного поля или из сочетания обоих методов. Модели гравитационного поля (EGM-96, ГАО -98, EGM-2008) позволяют вычислить с точностью до дециметров сглаженные аномалии высоты. Так, модель EGM-2008, содержащая гармоники до 2160 степени, отражает в аномалиях высоты волны с периодом $180^\circ/2160=5' \approx 10$ км. Волны меньшего периода можно выявить по детальным гравиметрическим съемкам ближайших к вычислительной точке окрестностей. Аномалии высоты, вычисленные с учетом гравиметрических съемок в ограниченной области, называют *местными*. Местные аномалии высоты возможно вычислить с точностью, соответствующей точности геометрического нивелирования и спутниковых определений.

Гравиметрические аномалии высоты ζ используют, как правило, не для вычисления нормальной высоты согласно (1), а для интерполирования на промежуточные между реперами геометрического нивелирования точки разностей ζ^{AG} - ζ астрономо-геодезической и гравиметрической аномалий высоты. Причем для составления таких разностей можно ограничиться использованием местных аномалий высоты, поскольку влияние не учтенных в местных аномалиях высоты дальних зон меняется плавно и его можно интерполировать

между нивелирными реперами так же, как и влияние несовпадения геодезического отсчетного и идеального общего земного эллипсоидов.

Замена геометрического нивелирования спутниковым нивелированием согласно (1) является ныне одной из основных производственных задач геодезии. В связи с этим стало актуальным высокоточное определение гравиметрической аномалии высоты, в частности местной аномалии высоты. Описанию возможной методики такого определения посвящено настоящее пособие.

2. Принцип вычисления местной гравиметрической аномалии высоты

При вычислении гравиметрической аномалии высоты, обусловленной влиянием аномалий силы тяжести в ограниченной области, применима формула Стокса для плоской отсчетной поверхности

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\alpha=0}^{\rho 2\pi} \Delta g dr d\alpha = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\Delta g dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (3)$$

В формуле (3) началом координат является точка O , в которой ищется аномалия высоты, r , α – полярные, x, y – прямоугольные координаты текущей точки, в которой должна быть известна смешанная аномалия Δg силы тяжести, r – радиус-вектор, α – азимут, ρ – радиус учитываемой области, ось x направлена на север, ось y на восток (рис. 1).

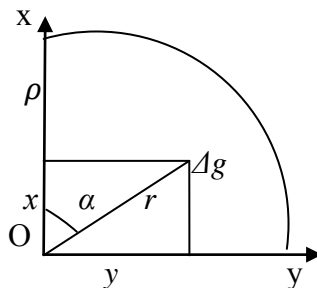


Рис. 1. К формуле (3) Стокса

Согласно формуле Стокса, аномалии Δg должны быть заданы непрерывно во всех точках области интегрирования. На самом деле они известны только на гравиметрических пунктах, поэтому возникает задача интерполирования аномалий. Применяют разные методы интерполирования. Например, можно считать, что аномалии в свободном воздухе зависят только от положения пункта и меняются по закону

$$\Delta g_{\text{инт}} = a'x + b'y + c' \quad (4)$$

на всей площади интегрирования; a' , b' , c' – интерполяционные коэффициенты.

Аномалии в свободном воздухе практически линейно зависят от высоты точки над уровнем моря, поэтому их интерполирование без учета этой зависимости приводит к большим ошибкам. В связи с этим обычно используют косвенные методы интерполирования аномалий в свободном воздухе. Рассмотрим один из таких методов.

Представим смешанную аномалию силы тяжести в виде

$$\Delta g = kH^n + ax + by + c + v, \quad (5)$$

где первый член учитывает зависимость аномалии силы тяжести от высоты; k, a, b, c – коэффициенты, v – разность заданной и интерполированной аномалии. В равенстве (5) перенесем член kH' в левую часть. В результате получаем аномалию Буге Δg_B

$$\Delta g_B = \Delta g - kH', \quad (6)$$

или в соответствии с (5)

$$\Delta g_B = ax + by + c + v. \quad (7)$$

Коэффициент k формул (5)-(6) зависит от плотности δ_o топографических масс

$$k = 2\pi G\delta_o = 0,0419\delta_o, \quad (8)$$

G – постоянная тяготения. Поправку $2\pi G\delta_o H'$ называют поправкой за промежуточный слой. Плотность земной коры различна в разных районах Земли и коэффициент k также может изменяться. Если плотность равна $2,67$ г/см³ (средняя плотность земной коры), произведение $0,0419\delta_o$ равно $0,1119$ мгал/м, при плотности $2,3$ г/см³ (плотность осадочных пород) $0,0419\delta_o = 0,0964$ мгал/м. Следовательно, коэффициент k равен приблизительно $0,1$ мгал/м.

Первые три члена правой части (7) выражают определяемую аналитически (детерминированную) часть $\Delta g_{B\text{дет}}$ аномалии Буге

$$\Delta g_{B\text{дет}} = ax + by + c, \quad (9)$$

а последний член v , вызванный нерегулярностью распределения притягивающих масс, – ее случайную часть. Если коэффициенты a, b, c определены, формула (9) позволяет найти детерминированную часть аномалии Буге в любой точке с известными координатами x, y . А для нахождения аномалии в свободном воздухе нужно вычислить в этой же точке поправку kH' за промежуточный слой и воспользоваться формулой

$$\Delta g_{\text{дет}} = kH' + ax + by + c, \quad (10)$$

$\Delta g_{\text{дет}}$ – детерминированная часть аномалии в свободном воздухе. Тем самым осуществляется косвенное интерполирование аномалий в свободном воздухе с использованием аномалий Буге. Формула (10) отличается от (4) тем, что в (10) включен член kH' , а интерполяционные коэффициенты относятся к аномалиям Буге. Из сравнения (10) и (5) следует, что

$$\Delta g = \Delta g_{\text{дет}} + v, \quad (11)$$

и случайная часть аномалий в свободном воздухе и Буге при таком методе интерполирования одинакова.

Подставим выражение (5) в формулу Стокса (3), записанную в прямоугольных координатах

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy + \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{v}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy + \frac{k}{2\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{H^v dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (12)$$

где интегрирование выполняется по прямоугольной области. Аномалия высоты представлена таким образом суммой трех членов. Введем для них обозначения ζ_D , ζ_C , ζ_T . Первый из них $-\zeta_D$ учитывает влияние на аномалию высоты детерминированной, второй - ζ_C - случайной части аномалии Буге, третий $-\zeta_T$ - влияние топографических масс.

Таким образом, процедура вычисления аномалии высоты складывается из таких этапов: сначала для всех гравиметрических пунктов нужно вычислить аномалии Буге, т.е. исключить из результатов наблюдений влияние топографических масс (формула (6)). Затем нужно выполнить интерполирование аномалий Буге, для чего их можно представить формулой (7). После этого выполнить интегрирование по формуле Стокса с использованием интерполяционных коэффициентов аномалий Буге. Наконец, найти влияние топографических масс на аномалию высоты.

Рассмотренный метод является простейшим случаем вычисления аномалии высоты, когда поверхность Земли заменена плоскостью, топографические массы - однородной плоской пластиной бесконечного простираения, наклоны земной поверхности не учтены. Но этот способ позволяет пояснить общий принцип вычисления элементов аномального гравитационного поля, согласно которому из измерений сначала исключают влияние топографических масс, затем выполняют вычисление различных элементов аномального поля в остаточном поле и наконец восстанавливают притяжение топографических масс. Формула Стокса получена им в предположении, что топографические массы отсутствуют и геоид является внешней уровенной поверхностью. Поэтому необходимость исключения влияния топографических масс возникла уже при первых опытах применения этой формулы. Оригинальный метод учета влияния топографических масс (метод выделения топографического массива) был разработан М.И.Юркиной и применен ею при первых вычислениях в соответствии с теорией Молоденского [8]. Ныне существует много вариантов представления топографических масс; все они в англоязычной литературе объединены термином «remove-restore» (удаление-восстановление).

В методическом пособии предлагается вычислить местную гравиметрическую аномалию высоты с учетом аномалий силы тяжести в прямоугольной области радиусом около 10 км. Схема съемки на локальном участке дана на рис. 2, каталог гравиметрических пунктов приведен в приложении 2. Ниже даны пояснения к отдельным этапам вычислений.

Вопросы и задания для самопроверки:

1. Дайте определение геодезической и нормальной высоты и аномалии высоты
2. Какой эллипсоид называют общим земным?
3. Что такое топографические массы?
4. Что такое аномалия в свободном воздухе? В чем отличие чистых и смешанных аномалий в свободном воздухе?
5. Что такое аномалия Буге?
6. Найдите связь прямоугольных x, y и полярных r, α координат
7. Получите формулу для вычисления ζ_D в полярной системе координат. Для аномалии Буге использовать формулу (9), интегрирование выполнить в области $0 \leq r \leq \rho$.

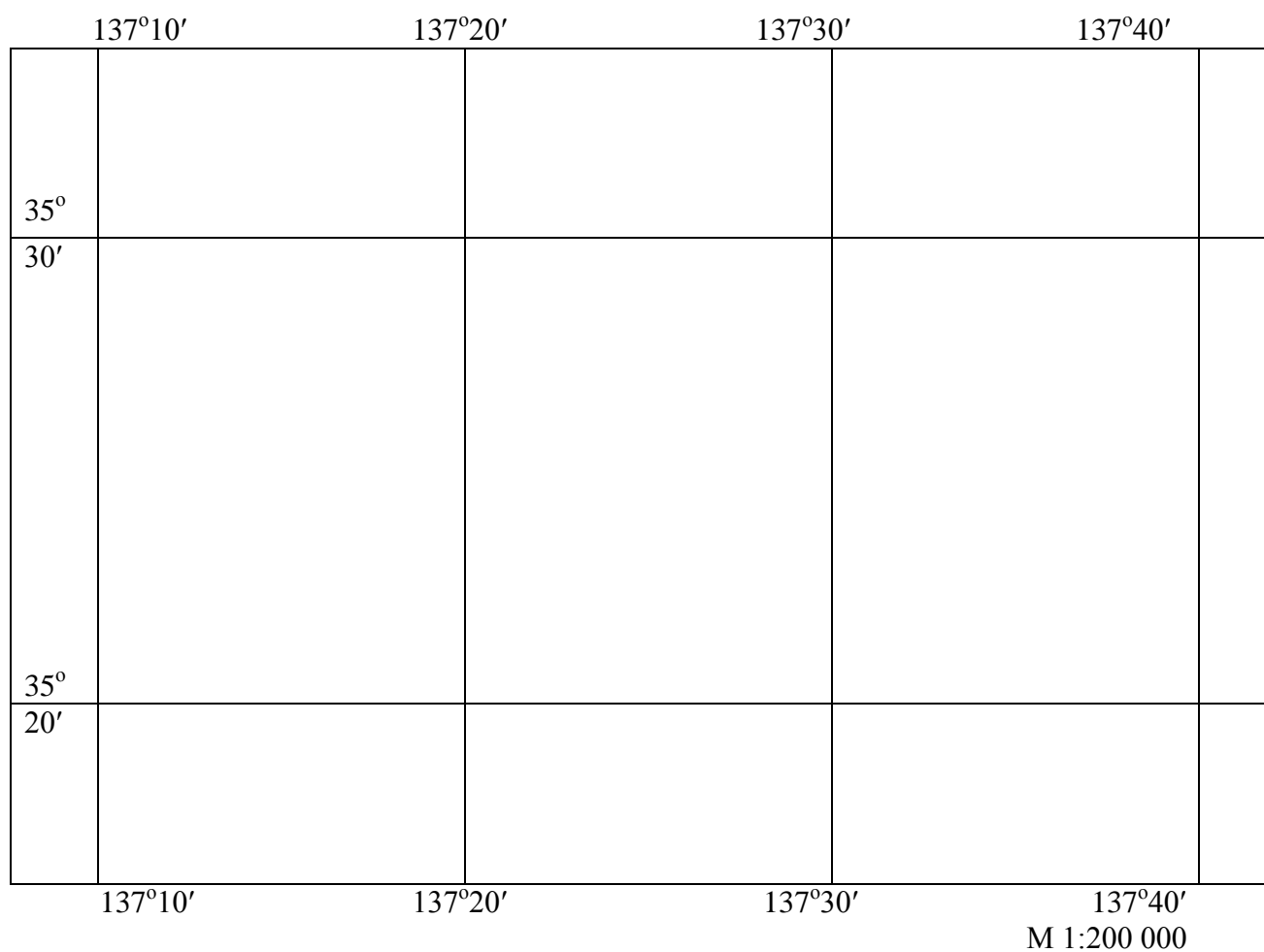


Рис. 2. Расположение гравиметрических пунктов на исследуемом участке
Съемка содержит 103 пункта, средняя плотность – 1 пункт на 10 км², среднее расстояние между пунктами около 3 км, максимальная разность высот 1400 м, плотность топографических масс 2,64 г/см³.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ БУГЕ И ИХ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Аномалии Буге вычисляют по формуле

$$\Delta g_B = g - \gamma - 0,0419 \delta_o H',$$

$g - \gamma = \Delta g$ – смешанная аномалия силы тяжести, g – измеренная сила тяжести, γ – нормальная сила тяжести на гипсометрической поверхности,

$$\gamma = \gamma_o(B) - 0,3086 H',$$

$\gamma_o(B)$ – нормальная сила тяжести на поверхности уровня эллипсоида

$$\gamma_o(B) = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B),$$

γ_e – значение нормальной силы тяжести на экваторе (экваториальная постоянная), β, β_1 – коэффициенты, B – широта. Для вычисления $\gamma_o(B)$ можно использовать формулу Гельмерта 1901-1909 г.г.

$$\gamma_o(B) = 978030 (1 + 0,005302 \sin^2 B - 0,000007 \sin^2 2B), \text{ мГал.}$$

На основе предыдущего напомним формулу для вычисления аномалии Буге в виде

$$\Delta g_B = g - \gamma - 0,0419 \delta_o H' = g - \gamma_o(B) + 0,3086 H' - 0,0419 \delta_o H'. \quad (13)$$

Для нахождения коэффициентов a, b, c уравнение (7) нужно составить для всех измерительных точек. Рассматривая их как уравнения погрешностей

$$ax_i + by_i + c - (\Delta g_B)_i = v_i, \quad (14)$$

в которых x_i, y_i являются известными величинами, $(\Delta g_B)_i$ – свободными членами, находим коэффициенты a, b, c под условием $[v^2] = \min$. Это приводит к системе нормальных уравнений

$$\begin{pmatrix} [xx] & [xy] & [x] \\ [xy] & [yy] & [y] \\ [x] & [y] & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x\Delta g_B] \\ [y\Delta g_B] \\ [\Delta g_B] \end{pmatrix} \quad \text{или } \mathbf{X} \mathbf{A} = \mathbf{L}.$$

Решение системы имеет вид $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{L}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [xx] & [xy] & [x] \\ [xy] & [yy] & [y] \\ [x] & [y] & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [x\Delta g_B] \\ [y\Delta g_B] \\ [\Delta g_B] \end{pmatrix}, \quad (15)$$

n - число используемых гравиметрических пунктов. После нахождения коэффициентов a, b, c в любой точке можно вычислить детерминированную часть аномалии Буге по формуле (9).

Случайная часть v обусловлена как отличием действительных аномалий от интерполированных по формуле (9), так и случайными ошибками измеренных аномалий в исходных точках.

Вопросы и задания для самопроверки:

1. Что такое гипсометрическая поверхность?
2. Какой эллипсоид называют уровенным?
3. Что называют промежуточным слоем?
4. Оцените ошибку вычисления аномалии Буге, если ошибки плановых координат составляют 10 м, ошибка высоты 1 м.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЧАСТИ АНОМАЛИЙ БУГЕ НА АНОМАЛИЮ ВЫСОТЫ

Согласно формуле (12) напишем

$$\zeta_D = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

Можно показать, что в точке вычисления, т.е. в начале координат при симметричном расположении области интегрирования,

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = 0.$$

Это означает, что при линейной зависимости аномалий силы тяжести от координат x, y на аномалию высоты оказывает влияние только постоянная часть гравитационной аномалии.

Для нахождения этой постоянной части, т.е. для вычисления интеграла $c \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ воспользуемся формулой, определяющей влияние на аномалию высоты произвольной прямоугольной ячейки [1, стр. 300]. Если применить эту формулу к вычислению влияния прямоугольника I (рис.3), то

$$\int_0^{x_2} \int_0^{y_2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left(x_2 \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_p}{2} \right) \right| + y_2 \ln \left| \operatorname{ct} \frac{\alpha_p}{2} \right| \right),$$

α_p - азимут точки P_1 . Для квадрата со сторонами $x_2=y_2$ $\alpha_p=45^\circ$, поэтому

$$\int_0^{x_2} \int_0^{y_2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2x_2 \ln \tan 67,5^\circ = 1,7627 x_2.$$

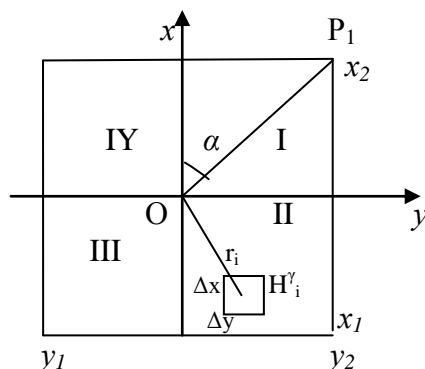


Рис.3. К вычислению ζ_D и ζ_T

В точке О влияние на аномалию высоты любого квадрата –I, II, III, IV, - на которые разделена учитываемая область, одинаково, поэтому для ζ_D получаем

$$\zeta_D = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \frac{2c}{\pi\gamma} \int_0^{x_2} \int_0^{y_2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3,525c}{\pi\gamma} x_2.$$

Для $\gamma = 980$ гал

$$\zeta_{D, \text{мм}} = 1,145 c x_2, \quad (16)$$

где c выражено в миллигалах, x_2 – в километрах.

Вопросы и задания:

1. Докажите равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{ax + by}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 0.$$

2. Как изменятся коэффициенты формулы $\Delta g_{B \text{ инт}} = ax + by + c$ при параллельном переносе координат?

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЛИЯНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ЧАСТИ АНОМАЛИЙ БУГЕ

В (12) было принято, что случайная часть v аномалии Буге вызывает случайную часть ζ_C аномалии высоты. Для ее оценивания можно применить метод средней квадратической коллокации (см. [1, гл.5], [2, гл. II,III], [3, с.275], [5],[7]), принцип которой заключается в следующем. Представим ζ_C линейной функцией случайной части v_i аномалий силы тяжести в измерительных точках

$$\zeta_C = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n = \sum \alpha_i v_i,$$

α_i – неизвестные коэффициенты, $i = 1, 2, \dots, n$, n – число точек, в которых известны v_i . Предсказанное таким образом значение $\widetilde{\zeta}_C$ будет отличаться от истинного

$$\zeta_C - \widetilde{\zeta}_C = \varepsilon = \zeta_C - \sum \alpha_i v_i,$$

ε – ошибка предсказания. Для средней квадратической ошибки m предсказания случайной части аномалии высоты получаем

$$m^2 = \frac{1}{n} \sum \varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum \zeta_C^2 - \frac{2}{n} \sum \alpha_i \zeta_C v_i + \frac{1}{n} \sum \sum \alpha_i \alpha_j v_i v_j,$$

суммирование в последнем члене выполняется по индексам i и j , $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$, $v_i v_j$ – произведение величин v в точках с индексами i и j . Выражение для m^2 записывают в виде

$$m^2 = D_\zeta - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i C(\zeta_C v_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \alpha_j C(v_i v_j), \quad (17)$$

где D_ζ – дисперсия случайной части аномалии высоты, $C(\zeta_C v_i)$ – взаимная ковариация случайной части аномалии высоты и аномалии силы тяжести, $C(v_i v_j)$ ковариация случайной части аномалии силы тяжести.¹ Коэффициенты α_i находят под условием

$$m^2 = \min,$$

которое приводит к выражению

$$\widetilde{\zeta}_C = C_{\zeta v} C_{vv}^{-1} v, \quad (18)$$

$C_{\zeta v}$ – вектор взаимной ковариации случайной части аномалии высоты и аномалии силы тяжести, C_{vv} матрица, элементами которой являются ковариации случайной части аномалии силы тяжести. Формально выражение (18) получено без использования формулы Стокса. Фактически эта формула скрыта во взаимной ковариационной функции $C_{\zeta v}$.

Вектор $C_{vv}^{-1} v$ не содержит координат вычислительной точки и в области вычисления постоянен. В (18) будут меняться только взаимные ковариации $C_{\zeta v}$ аномалии высоты в вычислительной точке и величины v в опорных точках. Поэтому формулу (18) можно использовать для вычисления $\widetilde{\zeta}_C$ в любой точке той области, в которой заданы v и определены ковариационные функции.

Примем $\zeta_C = \widetilde{\zeta}_C$ и напишем

$$\zeta_C = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{v}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \approx \widetilde{\zeta}_C = C_{\zeta v} C_{vv}^{-1} v.$$

Ошибку определения случайной части аномалии высоты определяет формула (17).

¹ Дисперсией называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Ковариация – среднее значение произведения случайных величин во всех парах точек, находящихся на заданном расстоянии.

Для вычисления аномалии высоты нужно определить ковариационные функции C_{vv} и $C_{\zeta g}$. В качестве ковариационной функции C_{vv} величин v используем модель Джордана [9]

$$C_{vv}(r) = D_v(1 + r/\zeta - r^2/2\zeta^2)e^{-r/\zeta}, \quad (19)$$

D_v – дисперсия разностей v , $\zeta = 0,913 r_o$, r_o – расстояние корреляции.

Взаимная ковариационная функция $C_{\zeta g}$ аномалии высоты и аномалии силы тяжести согласно Джордану имеет вид

$$C_{\zeta v} = \frac{D_v}{2\gamma} r \left\{ \left(1 - \frac{r^2}{2\zeta^2}\right) F_1\left(\frac{r}{2\zeta}\right) + \frac{r}{2\zeta} F_2\left(\frac{r}{2\zeta}\right) \right\}.$$

Эта функция имеет особенность: при $r=0$ функции F_1 и F_2 неограниченно возрастают $F_1\left(\frac{r}{2\zeta}\right) \rightarrow \infty$, $F_2\left(\frac{r}{2\zeta}\right) \rightarrow \infty$. Но произведение rF_1 остается конечным, а произведения rF_2 и r^2F_1 равны нулю. Поэтому при $r=0$ ковариационная функция $C_{\zeta v}$ принимает вид

$$D_{\zeta v} = \lim_{r \rightarrow 0} C_{\zeta v} = \frac{D_v}{2\gamma} r F_1\left(\frac{r}{2\zeta}\right),$$

$D_{\zeta v}$ – значение функции $C_{\zeta v}$ в нуле.

Разделим и умножим последнее равенство на 2ζ

$$D_{\zeta v} = \frac{D_v \zeta}{\gamma} \frac{r}{2\zeta} F_1\left(\frac{r}{2\zeta}\right).$$

Так как $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{2\zeta} F_1\left(\frac{r}{2\zeta}\right) = 1$, получаем

$$D_{\zeta v} = \frac{D_v \zeta}{\gamma}.$$

Взаимная ковариационная функция случайной части аномалий высоты и аномалий силы тяжести получает вид

$$C_{\zeta v} = \frac{D_v \zeta}{\gamma} \frac{r}{2\zeta} \left\{ \left(1 - \frac{r^2}{2\zeta^2}\right) F_1\left(\frac{r}{2\zeta}\right) + \frac{r}{2\zeta} F_2\left(\frac{r}{2\zeta}\right) \right\}. \quad (20)$$

Таблица значений функций $F_1(r/2\zeta)$ и $F_2(r/2\zeta)$ дана в приложении 1.

Методика определения параметров ковариационной функции описана в методических указаниях [5-6].

Вопросы и задания:

1. Дайте определение дисперсии, ковариации, взаимной ковариации
2. В каких единицах выражена дисперсия аномалии силы тяжести? Аномалии высоты?
3. Что такое ковариационная функция?
4. Что такое расстояние корреляции?

6. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ МАСС

Влияние ζ_T топографических масс на аномалию высоты выражает последний член формулы (12). Для его вычисления следует знать высоты всех точек области интегрирования. Обычно высоты точек поверхности Земли известны или в отдельных пунктах, или заданы в виде карт. Поэтому величину ζ_T вычислим численно. Разобьем область интегрирования на прямоугольники со сторонами Δx , Δy , в пределах которых высоты будем считать постоянными и равными H_i^y (рис.3). Заменяя дифференциалы dx , dy конечными разностями Δx , Δy , напомним

$$\zeta_T = \frac{k}{2\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{H^y dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \approx \frac{k\Delta x\Delta y}{2\pi\gamma} \sum_1^n \frac{H_i^y}{r_i},$$

H_i^y - средняя высота на площадке $\Delta x \Delta y$, $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ - расстояние от вычислительной точки до центра этой площадки, n - число площадок. Подставим в это равенство выражение (8) для коэффициента k и численные значения постоянной тяготения G и средней силы тяжести γ :

$$\zeta_T, \text{ мм} = \frac{2\pi G \delta_0 \Delta x \Delta y}{2\pi\gamma} \sum_1^n \frac{H_i^y}{r_i} = 6,805 \times 10^{-3} \delta_0 \Delta x \Delta y \sum_1^n \frac{H_i^y}{r_i}, \quad (21)$$

где плотность δ_0 выражено в г/см³, высота H_i^y в метрах, расстояния Δx , Δy , r_i - в километрах.

Вопросы и задания:

1. Чему равна приближенно постоянная тяготения G ?
2. Проверьте коэффициент формулы (21)
3. Ошибка средней высоты равна m_H . Найдите ошибку вычисления ζ_T

II. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ.

Вычислим для примера аномалию высоты в точке Р с координатами $X=9$ км, $Y=1$ км с учетом области 16×16 км. Из приложения 2 выбираем пункты, лежащие в квадрате $1 \text{ км} < X < 17 \text{ км}$, $-7 \text{ км} < Y < 9 \text{ км}$ с центром в выбранной точке. Переносим начало координат в вычислительную точку Р и находим координаты x, y гравиметрических пунктов относительно нового начала

$$x = X - 9, \quad y = Y - 1.$$

Схема расположения гравиметрических пунктов в этой системе приведена на рис. 4

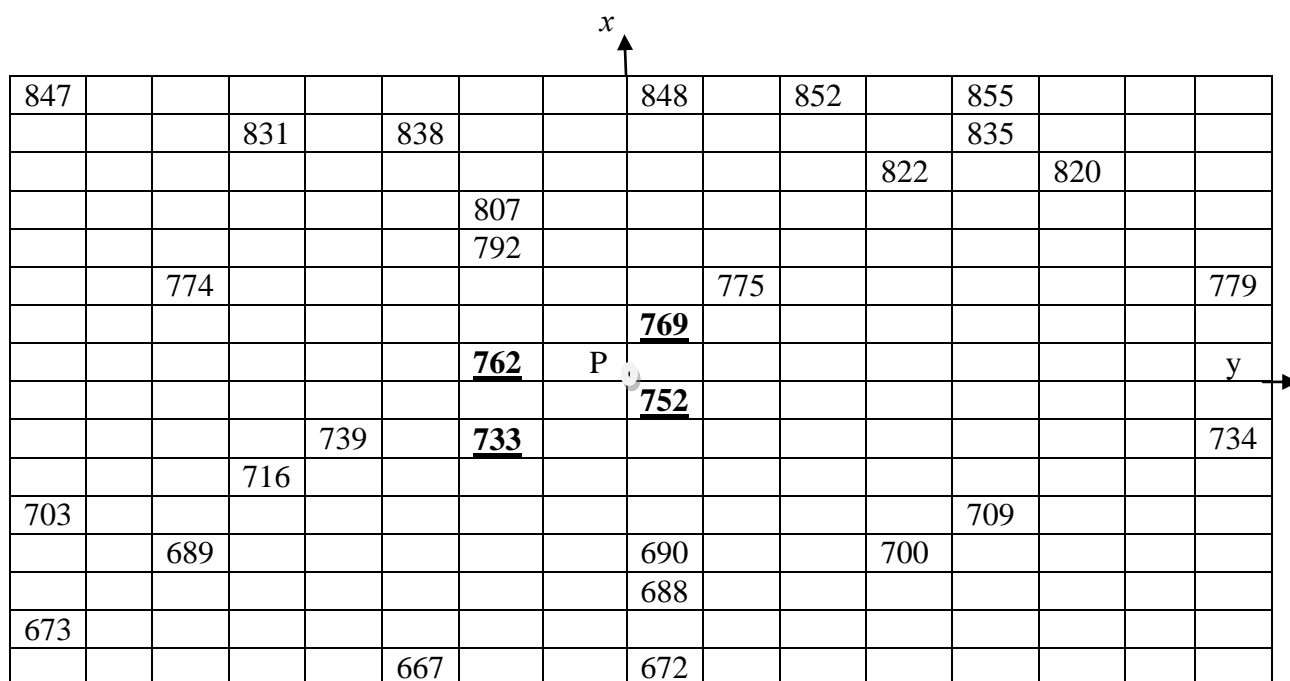


Рис. 4. Схема расположения гравиметрических пунктов на квадратах 1×1 км

На выбранном участке площадью 256 км^2 находятся 30 пунктов или 1 пункт на $8,53 \text{ км}^2$. Среднее расстояние между пунктами составляет $2,92 \text{ км}$.

Таблица 1. Каталог гравиметрических пунктов на выбранном участке

№ п.п.	№ по каталогу	Широта B	Долгота L	Высота H , м	Сила тяжести g , мГал	Абсцисса X км	Ордината Y км
1	661	35°20,60'	137°21,81	449	979 673,83	1,1119	-3,3107
2	667	20,84	22,99	460	671,80	1,5567	-5268
3	672	21,18	24,99	517	659,19	2,1868	1,4964
4	673	21,30	19,89	651	631,02	2,4092	-6,2123
5	688	22,19	25,11	527	658,54	4,0586	1,6774
6	689	22,23	21,24	473	667,44	4,1327	-4,1709
7	690	22,43	25,15	495	665,44	4,5033	1,7408
8	700	22,74	24,94	490	662,16	5,0779	4,4425
9	703	22,85	19,59	384	684,49	5,2818	-6,6636
10	709	23,21	27,91	476	662,41	5,9489	5,9076
11	716	23,49	21,81	394	683,11	6,4678	-3,3087
12	733	24,08	23,91	630	637,90	7,5612	-0,1360
13	734	24,10	29,44	635	630,30	7,5976	8,2172
14	739	24,33	22,07	411	680,25	8,0246	-2,9154
15	752	24,79	25,26	667	628,43	8,8770	1,9031
16	762	25,37	23,69	377	687,84	9,9519	-0,4685
17	769	25,88	24,74	392	682,51	10,8971	1,1171
18	774	26,17	20,92	351	692,87	11,4345	-4,6507
19	775	26,18	25,82	307	698,32	11,4530	2,7481
20	779	26,39	29,90	911	576,07	11,8422	8,9084
21	792	26,90	23,94	288	707,26	12,7874	-0,0906
22	807	27,39	23,95	367	691,58	13,6955	-0,0755
23	820	28,00	28,41	366	683,68	14,8186	6,6565
24	822	28,10	27,21	315	696,74	15,0113	4,8451
25	831	28,29	21,82	238	717,25	15,3634	-3,2903
26	835	28,45	27,72	319	694,33	15,6600	5,6145
27	838	28,55	22,81	240	714,00	15,8453	-1,7960
28	847	28,85	19,99	233	711,26	16,4012	-6,1875
29	848	28,86	25,35	336	693,32	16,4198	2,0373
30	855	35°29,12'	137°27,60	344	979 689,27	16,9016	5,4326

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Вычисления выполняем согласно формулам (13)-(15). Для плотности использовано значение $2,64 \text{ г/см}^3$.

Результаты вычисления приведены в таблице 2. Помимо коэффициентов аномалий Буге, вычислены также значения интерполяционных коэффициентов и величин ν' для аномалий в свободном воздухе.

Таблица 2. Вычисление аномалий силы тяжести и подбор аппроксимирующих функций

№№ п/п	№ по ката логу	x км	y км	H м	Аномалии в свободном воздухе			Аномалии Буге		
					g-γ мГал	a'x+b'y+c' мГал	v' мГал	Δg _Б мГал	ax+by+c мГал	v мГал
1	661	-7,8881	-4,3106	449	53,23	61,35	-8,12	3,57	3,20	0,36
2	667	-7,4433	-2,5268	460	54,27	62,71	-8,44	3,38	2,26	1,12
3	672	-6,8132	0,4964	517	58,74	65,37	-6,63	1,55	0,76	0,79
4	673	-6,5908	-7,2122	651	71,78	53,31	18,46	-0,23	3,05	-3,29
5	688	-4,9414	0,6775	527	59,77	60,22	-0,46	1,47	-0,86	2,33
6	689	-4,8673	-5,1709	473	51,94	51,36	0,59	-0,38	0,96	-1,34
7	690	-4,4966	0,7408	495	56,45	59,04	-2,59	1,69	-1,25	2,95
8	700	-3,9221	3,4425	490	51,19	61,38	-10,19	-3,02	-2,60	-0,41
9	703	-3,7182	-7,6636	384	40,65	44,35	-3,70	-1,83	0,80	-2,63
10	709	-3,0511	4,9076	476	46,45	61,03	-14,58	-6,20	-3,80	-2,40
11	716	-2,5322	-4,3087	394	41,44	45,89	-4,44	-2,14	-1,27	-0,87
12	733	-1,4388	-1,1360	630	69,02	47,43	21,59	-0,67	-3,20	2,54
13	734	-1,4022	7,2172	635	62,14	59,69	2,45	-8,10	-5,92	-2,18
14	739	-0,9754	-3,9154	411	42,79	41,97	0,81	-2,67	-2,70	0,02
15	752	-0,1230	0,9031	667	69,16	46,65	22,51	-4,62	-4,96	0,34
16	762	0,9519	-1,4685	377	38,26	40,03	-1,78	-3,45	-5,09	1,65
17	769	1,8971	0,1171	392	36,83	39,65	-2,82	-6,53	-6,39	-0,14
18	774	2,4345	-5,6507	351	34,12	29,56	4,56	-4,71	-4,99	0,28
19	775	2,4530	1,7481	307	25,98	40,46	-14,48	-7,98	-7,38	-0,60
20	779	2,8422	7,9085	911	89,83	48,45	41,37	-10,94	-9,69	-1,25
21	792	3,7874	-1,0906	288	28,03	32,40	-4,37	-3,82	-7,58	3,76
22	807	4,6955	-1,0755	367	36,03	29,80	6,23	-4,56	-8,35	3,78
23	820	5,8186	5,6565	366	26,96	36,52	-9,56	-13,52	-11,45	-2,07
24	822	6,0113	3,8451	315	24,14	32,28	-9,14	-10,71	-11,03	0,32
25	831	6,3634	-4,2903	238	20,61	20,22	0,39	-5,71	-8,70	2,99
26	835	6,6600	4,6145	319	22,46	32,55	-10,09	-12,83	-11,82	-1,01
27	838	6,8453	-2,7960	240	17,61	21,04	-3,43	-8,93	-9,59	0,65
28	847	7,4198	1,0373	233	26,11	25,06	1,05	-11,05	-11,30	0,25
29	848	7,4012	-7,1875	336	12,28	12,94	-0,66	-13,49	-8,64	-4,85
30	856	7,9016	4,4326	344	24,17	28,70	-4,53	-13,89	-12,80	-1,09

$$\begin{array}{l}
 [v'] \quad 0 \\
 [v'v'] \quad 4181,1465 \\
 \text{Дисперсия } [v'v']/30 \quad 139,3715
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 [v] \quad 0 \\
 [vv] \quad 126,4411 \\
 [vv]/30 \quad 4,2147
 \end{array}$$

Нормальные уравнения для получения интерполяционных коэффициентов a, b, c и a', b', c' получают вид:

$$\begin{pmatrix} 760,63 & 154,10 & 13,28 \\ 154,10 & 556,46 & -12,06 \\ 13,28 & -12,06 & 30 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} -748,16 & -1371,60 \\ -250,23 & -163,31 \\ -150,33 & 1292,44 \end{pmatrix}$$

Значения интерполяционных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,001411 & -0,000408 & -0,000789 \\ -0,000408 & 0,001931 & 0,000957 \\ -0,000789 & 0,000957 & 0,034067 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -748,16 & -1371,60 \\ -250,23 & -163,31 \\ -150,33 & 1292,44 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0,8351 & -2,8880 \\ -0,3218 & 1,4805 \\ -4,7706 & 44,9547 \end{pmatrix}.$$

Проанализируйте результаты вычислений:

1. Постройте графики зависимости аномалий в свободном воздухе и Буге от высоты.
2. Сравните значения v' и v . Во введении (стр. 4 формула (1)) утверждалось, что случайная часть аномалий в свободном воздухе и Буге одинакова. Почему величины v' и v не совпадают?
3. Определите параметры ковариационных функций величин v' и v . Методика определения этих параметров описана в [5] [6]. Вкратце напомним ее.
Дисперсии аномалий силы тяжести определены в таблице 2.
Определим расстояние корреляции. Для этого нужно найти ковариации $cov(v_i v_j)$ величин v для разных расстояний между пунктами, построить график ковариаций и найти с помощью этого графика расстояние, на котором ковариация равна половине дисперсии. Ковариации определяют по формуле

$$cov(v_i v_j) = \frac{\sum_1^n v_i v_j}{n},$$

n – число произведений $v_i v_j$ для одного и того же расстояния между пунктами. Так как гравиметрическая съемка на участке неравномерна, были определены средние произведения величин v на интервалах расстояний 0-2 км, 2-3 км, 3-4 км, 5-6 км. Результат вычислений представлен в таблице 3 и на рис.5.

Таблица 3. Ковариации случайной части аномалий силы тяжести

среднее расстояние км	число произведений	ковариация мГал ²	
		Аномалий в свободном воздухе	Аномалий Буге
1,44	9	45,829	3,066
2,60	22	9,566	1,664
3,49	17	-3,347	0,636
4,44	31	-	-0,060
5,41	38	-	0,213

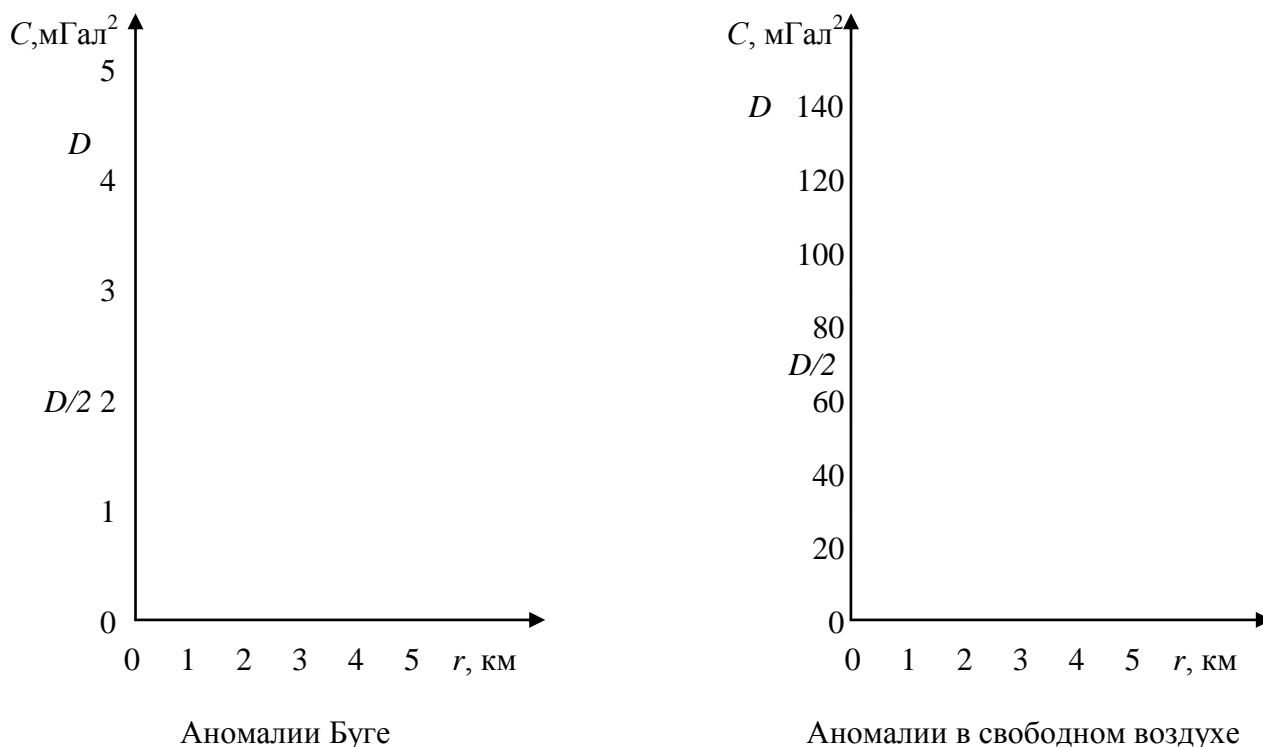


Рис. 5. Зависимость ковариаций случайной части аномалий силы тяжести от расстояния (эмпирическая ковариационная функция)

Согласно графику на рис.5, ковариация аномалий в свободном воздухе равна половине дисперсии, т.е. 70 мГал^2 , на расстоянии около 1 км. Метод средней квадратической коллокации дает удовлетворительные результаты только в том случае, если расстояние между опорными пунктами сравнимо с расстоянием корреляции. Так как в рассматриваемом примере расстояние между гравиметрическими пунктами составляет 2,9 км, что в три раза больше расстояния корреляции, заключаем, что для нахождения случайной части аномалий в свободном воздухе при их линейном интерполировании метод коллокации применять нельзя. Т.е. если при интерполировании не учитывать зависимость аномалии в свободном воздухе от высоты, нужно увеличить плотность съемки.

Для аномалии Буге расстояние корреляции равно 2,2 км. Поэтому для рассматриваемой плотности съемки правомерно применение метода коллокации.

При выполнении задания расстояние корреляции можно не определять и принять его равным 2,2 км.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЧАСТИ АНОМАЛИИ БУГЕ НА АНОМАЛИЮ ВЫСОТЫ.

Влияние детерминированной части находим в соответствии с разделом I.3. Согласно (9) с найденными выше значениями коэффициентов a , b , c формула для вычисления детерминированной части аномалии Буге получает вид

$$\Delta g_{\text{Бдет}} = -0,8351x - 0,3218y - 4,7706, \text{ мГал.}$$

Подставив в формулу (16) значения $c = -4,77 \text{ мГал}$ и $x_2 = 8 \text{ км}$, для точки Р рис.4 находим

$$\zeta_D = -43,7 \text{ мм.}$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ЧАСТИ АНОМАЛИИ ВЫСОТЫ

Составим ковариационную функцию случайной части аномалий Буге и взаимную ковариационную функцию аномалий силы тяжести и высоты. Дисперсию величины v находим по данным таблицы 2

$$D_v = \frac{[vv]}{30} = 4,2147 \text{ мгал}^2.$$

Среднее квадратическое значение v составляет 2 мГал. Так как ошибка измерения силы тяжести равна 0,01 мГал, а ошибка высоты гравиметрического пункта – 1м, заключаем, что полученные значения v соответствуют случайной части реальных аномалий Буге.

Для

рассматриваемого примера поэтому примем $r_o = 2,2$ км, $\xi = 2,01$ км. С этими значениями параметров запишем формулы (19) и (20) ковариационных функций случайной части

$$C_{vv}(r) = 4,2147(1 + r/2,01 - r^2/8,08)e^{-r/2,01}, \quad \text{мГал}^2,$$

$$C_{\zeta v} = 0,8644 \left\{ \left(1 - \frac{r^2}{8,08}\right) F_1 + \frac{r}{4,02} F_2 \right\}, \quad \text{см мГал};$$

Расстояние r в этих формулах выражено в километрах.

Для составления уравнения (18) ковариации $C_{vv}(r)$ нужно вычислить для всех пар гравиметрических пунктов, а взаимные ковариации $C_{\zeta v}$ - для всех расстояний от определяемого пункта до опорных. Поскольку в рассматриваемом примере использованы 30 исходных пунктов, получим матрицы степени 30. Чтобы уменьшить объем вычислений, ограничим число опорных пунктов. Ковариационные функции убывают с увеличением расстояния, поэтому в каждой точке при вычислениях можно использовать только близко расположенные точки с известными значениями v . Целесообразно в вычисления включать те пункты, расстояние до которых меньше расстояния корреляции. Для рассматриваемого примера таких пунктов четыре. Это пункты № 733, 752, 762 и 769 (см. рис.4). Но ограниченную таким образом матрицу можно использовать только для нахождения аномалии высоты вблизи этих пунктов, а не на всей рассматриваемой площади.

Составим уравнение (18) для пяти точек: точки Р с координатами $X=9$ км, $Y=1$ км и опорных гравиметрических пунктов №№ 733,752,762,769.

Для вычисления ковариаций по формулам (19) – (20) предварительно нужно найти расстояния от вычислительной точки до выбранных опорных пунктов и взаимные расстояния между ними. Результат вычисления ковариаций $C_{vv}(r)$, приведен в таблице 4.

Таблица 4. Ковариации аномалии силы тяжести

i/j	Расстояния r , км				Ковариации $C_{vv}(r)$, мГал ²			
	733	752	762	769	733	752	762	769
733	0	2,4268	2,4127	3,5335	4,2147	1,8631	1,8780	0,8812
752	2,4268	0	2,6038	2,1676	1,8631	4,2147	1,6805	2,1460
762	2,4127	2,6038	0	1,8459	1,8780	1,6805	4,2147	2,5180
769	3,5335	2,1676	1,8459	0	0,8812	2,1460	2,5180	4,2147

Затем вычисляем взаимные ковариации $C_{v\zeta}(r)$, используя вычисленные расстояния между пунктами и приведенные в приложении 1 функции F_1 и F_2 . Пример вычисления ковариаций $C_{v\zeta}(r)$ для двух пунктов – Р и №752 – приведен в таблице 5; для остальных пунктов вычисления аналогичны.

Таблица 5. Взаимные ковариации аномалий силы тяжести и аномалий высоты

Определяемый пункт	опорный пункт	Расстояние r , км	$r/2\zeta$	F_1	F_2	$C_{v\zeta}(r)$ мГал см
Р	733	1,8332	0,4560	1,7521	1,4957	0,6722
	752	0,9114	0,2267	4,1858	2,1481	0,8312
	762	1,7500	0,4353	1,9601	1,5360	0,7095
	769	1,9248	0,4788	1,6330	1,4513	0,6534
№752	733	2,4268	0,6037	1,1698	1,2532	0,5602
	752	0	0	∞	∞	0,8643
	762	2,6038	0,6477	1,0634	1,1989	0,5305
	769	2,1676	0,5392	1,3877	1,3502	0,6100

Для случайной части аномалии высоты согласно формуле (18) получаем

$$\begin{pmatrix} \zeta_P \\ \zeta_{733} \\ \zeta_{752} \\ \zeta_{762} \\ \zeta_{769} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6722 & 0,8312 & 0,7095 & 0,6535 \\ 0,8643 & 0,5602 & 0,5625 & 0,3765 \\ 0,5602 & 0,8643 & 0,5305 & 0,6099 \\ 0,5625 & 0,5305 & 0,8643 & 0,6684 \\ 0,3765 & 0,6099 & 0,6684 & 0,8643 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,2147 & 1,8631 & 1,8780 & 0,8812 \\ 1,8631 & 4,2147 & 1,6805 & 2,1460 \\ 1,8780 & 1,6805 & 4,2147 & 2,5180 \\ 0,8812 & 2,1460 & 2,5180 & 4,2147 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2,54 \\ 0,34 \\ 1,65 \\ -0,14 \end{pmatrix}$$

После нахождения обратной матрицы находим

$$\begin{pmatrix} \zeta_P \\ \zeta_{733} \\ \zeta_{752} \\ \zeta_{762} \\ \zeta_{769} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6722 & 0,8312 & 0,7095 & 0,6535 \\ 0,8643 & 0,5602 & 0,5625 & 0,3765 \\ 0,5602 & 0,8643 & 0,5305 & 0,6099 \\ 0,5625 & 0,5305 & 0,8643 & 0,6684 \\ 0,3765 & 0,6099 & 0,6684 & 0,8643 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3479 & -0,1381 & -0,1532 & 0,0891 \\ -0,1381 & 0,3812 & 0,0128 & -0,1729 \\ -0,1532 & 0,0128 & 0,4435 & -0,2394 \\ 0,0891 & -0,1729 & -0,2394 & 0,4497 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,54 \\ 0,34 \\ 1,65 \\ -0,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,43 \text{ см} \\ 0,20 \text{ см} \\ 0,42 \text{ см} \\ 0,30 \text{ см} \\ 0,15 \text{ см} \end{pmatrix}$$

Влияние случайной части аномалий Буге составляет 2 – 4 см. Поэтому если аномалию высоты нужно вычислить с сантиметровой точностью, случайную часть аномалии высоты нужно учитывать.

5. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ МАСС

Для вычисления по формуле (21) влияния топографических масс на аномалию высоты нужно найти расстояния от вычислительной точки до центров всех квадратов 1 км x 1 км и средние высоты на этих квадратах. Средние высоты для области интегрирования выбираем из Приложения 3 и помещаем в табл.6. Вычисление расстояний и суммы высот на равноудаленных от вычислительной точки квадратах приведены в табл. 7.

Таблица 6. Средние высоты на квадратах 1 км x 1 км

233	235	252	260	263	276	274	276	303	336	304	324	344	351	350	354
260	236	237	238	299	240	255	296	340	327	308	315	319	338	357	336
357	300	269	281	272	280	306	340	347	330	302	325	341	366	453	387
370	365	325	300	279	337	362	342	310	308	310	333	411	510	641	560
380	375	340	325	310	313	288	287	305	304	310	382	509	620	684	760
420	380	351	349	351	321	325	320	313	307	358	451	550	671	720	871
425	375	352	358	354	356	377	354	332	465	425	525	600	630	700	831
375	349	350	357	360	370	378	450	510	590	600	630	660	710	770	788
310	315	353	375	408	420	503	605	667	670	666	673	680	689	680	679
260	325	360	389	411	467	630	632	640	643	648	620	610	550	635	635
320	340	375	394	405	460	576	591	595	610	620	596	490	501	618	740
384	380	390	425	440	465	500	552	550	563	544	506	476	483	636	787
440	450	473	470	480	475	510	514	495	500	500	490	523	550	610	770
510	520	508	478	476	486	509	525	527	510	505	523	550	575	624	734
651	624	550	470	468	480	490	504	517	520	530	532	570	622	680	657
650	580	550	449	450	460	475	490	520	540	541	575	603	640	650	662

Для $\delta_0 = 2,64 \text{ г/см}^3$, $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ км}$ формула (21) получает вид

$$\zeta_T = 1,800 \times 10^{-3} \sum_1^n \frac{H_i^y}{r_i},$$

где ζ_T выражено в сантиметрах, H_i^y – в метрах, r_i – в километрах. Используя данные таблицы 7, по этой формуле находим

$$\zeta_T = 36,00 \text{ см.}$$

Суммируя значения трех членов формулы (12), находим окончательно для аномалии высоты в точке P с координатами $X=9 \text{ км}$, $Y=1 \text{ км}$

$$\zeta_p = -4,37 \text{ см} + 0,43 \text{ см} + 36,00 \text{ см} = 32,06 \text{ см.}$$

Как видно, наибольшее влияние на аномалию высоты оказывают топографические массы.

Таблица 7. Расстояния до центров равноудаленных квадратов и сумма высот

расстояние	Число квадратов 1 км х 1 км	Сумма высот м		расстояние	Число квадратов 1 км х 1 км	Сумма высот м
$0,5 \sqrt{2}$	4	2232		$0,5 \sqrt{5^2+11^2}$	8	3272
$0,5 \sqrt{1+3^2}$	8	4109		$0,5 \sqrt{5^2+13^2}$	8	3618
$0,5 \sqrt{1+5^2}$	8	3825		$0,5 \sqrt{5^2+15^2}$	8	3810
$0,5 \sqrt{1+7^2}$	8	3765		$0,5 \sqrt{7^2+7^2}$	4	1638
$0,5 \sqrt{1+9^2}$	8	3733		$0,5 \sqrt{7^2+9^2}$	8	3317
$0,5 \sqrt{1+11^2}$	8	3202		$0,5 \sqrt{7^2+11^2}$	8	3423
$0,5 \sqrt{1+13^2}$	8	3781		$0,5 \sqrt{7^2+13^2}$	8	3691
$0,5 \sqrt{1+15^2}$	8	3742		$0,5 \sqrt{7^2+15^2}$	8	3772
$0,5 \sqrt{3^2+3^2}$	4	2115		$0,5 \sqrt{9^2+9^2}$	4	1704
$0,5 \sqrt{3^2+5^2}$	8	3683		$0,5 \sqrt{9^2+11^2}$	8	3508
$0,5 \sqrt{3^2+7^2}$	8	3542		$0,5 \sqrt{9^2+13^2}$	8	3663
$0,5 \sqrt{3^2+9^2}$	8	3720		$0,5 \sqrt{9^2+15^2}$	8	3787
$0,5 \sqrt{3^2+11^2}$	8	3577		$0,5 \sqrt{11^2+11^2}$	4	1718
$0,5 \sqrt{3^2+13^2}$	8	3698		$0,5 \sqrt{11^2+13^2}$	8	3750
$0,5 \sqrt{3^2+15^2}$	8	3776		$0,5 \sqrt{11^2+15^2}$	8	3212
$0,5 \sqrt{5^2+5^2}$	4	1759		$0,5 \sqrt{13^2+13^2}$	4	1897
$0,5 \sqrt{5^2+7^2}$	8	3439		$0,5 \sqrt{13^2+15^2}$	8	3749
$0,5 \sqrt{5^2+9^2}$	8	3405		$0,5 \sqrt{15^2+15^2}$	4	1899

III ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$

$$F_1(x) = I_0(x)K_1(x) - I_1(x)K_0(x) \quad F_2(x) = I_0(x)K_0(x) + I_1(x)K_1(x)$$

$I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ - модифицированные функции Бесселя.

X	$F_1(x)$	$F_2(x)$		x	$F_1(x)$	$F_2(x)$
0,0	∞	∞				
0,1	9,7618	2,9281		1,1	0,4429	0,8098
0,2	4,6476	2,2502		1,2	0,3782	0,7546
0,3	2,9181	1,8677		1,3	0,3254	0,7057
0,4	2,0444	1,6047		1,4	0,2822	0,6627
0,5	1,5224	1,4098		1,5	0,2387	0,6180

0,6	1,1788	1,2577		1,6	0,2171	0,5900
0,7	0,9370	1,1343		1,7	0,1924	0,5589
0,8	0,7610	1,0328		1,8	0,1712	0,5308
0,9	0,6272	0,9465		1,9	0,1533	0,5053
1,0	0,5241	0,8732		2,0	0,1378	0,4823

Приложение 2. Каталог гравиметрических пунктов

№ п.п.	№ по каталогу	Широта B	Долгота L	Высота H , м	Сила тяжести g , мгал	ордината ² X , км	абсцисса Y , км
1	650	35°20,07'	137°28,47'	671	979 628,84	0,130	6,758
2	653	20,26	32,75	723	617,42	0,482	13,228
3	654	20,31	39,12	1046	953,58	0,574	22,859
4	655	20,44	31,24	481	626,23	0,815	10,945
5	657	20,49	30,71	633	635,39	0,908	10,144
6	660	20,57	09,69	201	722,40	1,056	-21,633
7	661	20,60	21,81	449	673,82	1,112	-3,311
8	667	20,84	22,99	460	671,80	1,557	-1,527
9	668	21,03	34,36	912	581,32	1,908	15,660
10	671	21,13	32,31	837	595,14	2,094	12,561
11	672	21,18	24,99	917	659,19	2,187	1,496
12	673	21,30	19,89	851	631,02	2,409	-6,212
13	674	21,35	40,51	1128	538,58	2,502	24,955
14	684	21,91	35,22	1156	533,44	3,539	16,257
15	685	22,05	09,29	258	710,42	3,799	-22,231
16	688	22,19	25,11	527	658,54	4,059	1,677
17	689	22,23	21,24	473	667,44	4,133	-4,171
18	690	22,43	35,15	495	665,44	4,503	1,741
19	698	22,68	13,93	182	722,41	4,967	-15,215
20	700	22,74	24,96	490	662,16	5,078	4,442
21	703	22,85	19,59	384	684,49	5,282	-6,664
22	707	23,02	11,59	286	703,31	5,597	-18,751
23	709	23,21	37,91	476	662,41	5,949	5,908
24	711	23,25	34,99	1349	493,76	6,023	16,605
25	712	23,29	31,89	1088	545,65	6,097	11,921
26	713	23,29	32,89	1223	515,91	6,097	13,432
27	715	23,49	13,83	264	707,58	6,468	-15,365
28	716	23,49	21,81	394	683,11	6,468	-3,309
29	717	23,52	35,47	1406	481,54	6,523	17,329
30	721	23,73	41,44	1073	548,54	6,913	26,347
31	727	23,88	12,69	308	699,30	7,191	-17,086
32	729	23,97	18,72	226	714,82	7,357	-7,976
33	731	23,99	36,14	1218	518,83	7,394	18,339
34	733	24,08	23,91	630	637,90	7,561	-0,136

² Прямоугольные координаты вычислены по формулам $X = \frac{R_{KM}}{\rho^0} (B - 35^\circ 20')$, $Y = \frac{R_{KM}}{\rho^0} \cos B (L - 137^\circ 24')$, что соответствует главным членам формул для вычисления координат Гаусса-Крюгера для осевого меридиана 137,4°.

35	734	24,10	29,44	635	630,30	7,598	8,217
36	737	24,22	30,89	883	581,61	7,821	10,408
37	738	24,29	15,63	279	702,88	7,950	-12,643
38	739	24,33	22,07	411	680,25	8,024	-2,915
39	741	24,39	35,19	1084	541,29	8,136	16,903
40	742	24,42	11,81	227	714,20	8,191	-18,413
41	752	24,79	25,26	667	628,43	8,877	1,903
42	756	25,07	30,18	783	601,93	9,396	9,334
43	757	25,24	33,43	813	592,57	9,711	14,242
44	759	25,31	17,68	568	645,39	9,840	-9,545
45	760	25,34	13,59	390	681,51	9,896	-15,722
46	762	25,37	23,69	378	687,84	9,952	-0,468
47	763	25,40	16,58	478	666,84	10,008	-11,206
48	767	25,75	15,12	448	670,09	10,656	-13,410
49	769	25,88	24,74	392	682,51	10,897	1,117
50	771	26,03	38,94	957	562,44	11,175	22,560
51	774	26,17	20,92	351	692,87	11,434	-4,651
52	775	26,18	25,82	308	698,32	11,453	2,748
53	778	26,38	31,72	524	650,38	11,824	11,656
54	779	26,39	29,90	911	576,07	11,842	8,908
55	787	26,78	31,20	479	458,33	12,565	10,870
56	792	26,90	23,94	288	707,26	12,787	-0,091
57	795	26,93	11,71	405	681,64	12,843	-18,555
58	797	27,04	13,33	458	671,42	13,047	-16,109
59	802	27,12	37,44	1266	499,99	13,195	20,290
60	807	27,39	23,95	367	691,58	13,696	-0,075
61	809	27,41	19,16	393	685,33	13,733	-7,306
62	810	27,47	17,27	544	655,39	13,844	-10,159
63	814	27,75	10,43	160	728,97	14,363	-20,484
64	818	27,99	14,82	494	665,51	14,807	-13,856
65	820	28,00	28,41	366	683,68	14,819	6,656
66	822	28,10	27,21	315	696,74	15,011	4,845
67	823	28,11	38,12	1569	436,20	15,030	21,312
68	824	28,13	18,88	295	700,74	15,067	-7,728
69	830	28,29	11,97	192	719,83	15,363	-18,157
70	831	28,29	21,82	238	717,25	15,363	-3,290
71	833	28,32	30,37	380	675,17	15,419	9,614
72	835	28,45	27,72	319	694,33	15,660	5,614
73	838	28,55	22,81	240	714,00	15,845	-1,796
74	840	28,57	18,00	577	651,17	15,882	-9,055
75	843	28,64	40,37	910	573,63	16,012	24,706
76	844	28,67	12,95	431	677,44	16,068	-16,677
77	845	28,78	31,96	530	640,54	16,272	12,013
78	847	28,85	19,99	233	711,26	16,401	-6,187
79	848	28,86	25,35	336	693,32	16,420	2,037
80	849	28,91	33,27	594	433,68	16,512	13,990
81	852	29,03	26,18	304	699,02	16,735	3,290
82	855	29,12	27,60	344	689,27	16,902	5,433
83	859	29,40	11,83	302	702,46	17,421	-18,364
84	861	29,43	35,76	753	602,64	17,476	17,745

85	864	29,67	27,52	332	691,65	17,921	5,311
86	866	29,69	18,90	329	692,25	17,958	-7,695
87	872	29,84	10,53	458	672,72	18,236	-20,324
88	875	29,91	35,22	621	627,71	18,365	16,929
89	877	30,18	24,30	340	692,36	18,866	0,453
90	879	30,20	23,48	350	690,52	18,903	-0,784
91	885	30,33	40,77	922	571,25	19,144	25,300
92	886	30,37	16,54	681	629,43	19,218	-11,255
93	889	30,44	34,38	442	663,68	19,348	15,660
94	890	30,47	18,11	405	981,62	19,404	-8,886
95	895	30,88	22,75	424	674,20	20,108	-1,886
96	900	31,07	11,83	494	669,74	20,515	-18,358
97	906	31,22	15,17	574	653,03	20,793	-13,319
98	907	31,37	26,81	318	692,80	21,071	4,238
99	909	31,40	10,92	517	663,93	21,127	-19,729
100	911	31,42	24,23	365	684,29	21,164	0,347
101	914	31,50	25,55	340	687,62	21,312	2,338
102	915	31,52	22,80	381	980,82	21,349	-1,810
103	922	35°31,70'	137°38,43'	958	979 559,74	21,683	21,764

Приложение 3. Средние высоты (в метрах) на квадратах 1км x 1км

Средняя абсцисса	Средняя ордината квадрата, км										
	20,5	19,5	18,5	17,5	16,5	15,5	14,5	13,5	12,5	11,5	10,5
-19,5	505	485	458	380	250	170	160	231	349	340	318
-18,5	494	481	400	302	257	192	205	388	405	380	332
-17,5	518	500	425	351	295	240	284	367	426	407	342
-16,5	531	508	453	424	389	330	346	458	434	422	398
-15,5	539	528	478	462	431	430	450	460	452	441	390
-14,5	560	561	533	495	487	450	477	470	462	451	438
-13,5	574	572	559	525	526	470	494	480	460	484	448
-12,5	597	633	581	510	530	520	500	490	465	473	449
-11,5	625	681	619	590	568	550	530	500	485	481	480
-10,5	648	690	615	503	590	590	570	544	500	505	410
-9,5	562	495	502	545	550	580	544	553	511	500	498
-8,5	470	405	396	425	477	577	453	453	480	495	505
-7,5	395	385	329	322	330	295	333	393	431	460	450
-6,5	381	376	360	307	233	260	357	370	380	420	425
-5,5	368	365	370	301	235	236	300	365	375	380	375
-4,5	350	357	361	305	252	237	269	325	340	351	352
-3,5	375	362	355	307	260	238	281	300	325	349	353
-2,5	400	388	350	298	263	239	272	299	310	351	354
-1,5	403	370	350	296	276	240	280	337	313	321	356
-0,5	385	348	350	304	274	255	306	367	288	325	377
0,5	365	340	340	320	276	296	340	349	287	320	354
1,5	340	360	340	326	303	340	347	311	305	313	332
2,5	328	325	325	326	336	327	330	308	304	307	465
3,5	320	315	310	304	304	308	302	310	310	358	425

4,5	318	315	305	315	324	315	325	333	382	454	575
5,5	330	335	330	332	344	319	341	411	509	550	600
6,5	350	350	350	352	354	338	366	510	620	671	630
7,5	351	350	350	353	350	357	453	641	684	720	700
8,5	350	350	350	350	354	366	387	550	760	871	834
9,5	350	350	350	355	363	380	396	549	800	911	838
10,5	350	350	360	368	388	394	400	450	479	710	750
11,5	356	365	375	390	497	518	437	475	515	524	680
12,5	370	378	400	480	530	542	541	515	550	612	678
13,5	382	395	450	520	562	581	585	598	654	680	733
14,5	395	440	550	570	594	647	696	720	756	770	803
15,5	442	490	570	640	679	762	800	843	861	870	870
16,5	450	540	621	670	793	811	896	934	953	960	924
17,5	470	550	660	753	838	994	980	1040	1011	1060	930
18,5	480	580	700	830	905	1103	1111	1087	1070	1030	936
19,5	480	640	800	880	1003	1176	1250	1201	1130	1040	942
20,5	560	680	900	990	1085	1366	1404	1266	1194	1030	958
21,5	580	670	950	1050	1144	1428	1520	1350	1180	1160	959
22,5	600	780	1000	1050	1200	1411	1407	1341	1157	967	954

Средняя абсцисса X, км	Средняя ордината Y, км										
	10,5	9,5	8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5
-19,5	318	270	233	245	258	270	272	258	221	201	190
-18,5	332	270	227	230	260	286	275	240	190	190	190
-17,5	342	260	260	280	280	270	225	200	180	190	190
-16,5	398	290	300	308	290	255	200	200	180	190	200
-15,5	390	390	350	310	264	205	182	190	190	200	250
-14,5	438	380	350	300	260	210	200	225	260	295	310
-13,5	448	380	325	270	260	240	250	300	320	335	340
-12,5	444	400	279	279	250	253	310	330	370	380	400
-11,5	480	478	350	270	250	275	325	370	400	425	445
-10,5	418	480	390	300	240	290	350	410	440	475	475
-9,5	498	568	420	340	240	300	380	440	470	510	525
-8,5	505	475	400	300	230	325	400	460	520	550	570
-7,5	450	430	350	225	270	350	400	510	570	595	600
-6,5	425	375	310	260	320	384	440	510	651	650	600
-5,5	375	350	315	325	340	380	450	520	600	580	570
-4,5	352	350	350	360	375	390	478	508	550	550	500
-3,5	353	350	375	390	394	425	470	480	470	440	450
-2,5	354	360	400	411	405	440	480	470	468	450	450
-1,5	356	370	420	460	460	465	475	490	480	460	470
-0,5	377	378	500	630	570	500	510	500	490	475	480
0,5	354	450	600	630	590	550	514	525	500	490	500
1,5	332	510	667	640	595	550	495	527	517	520	520
2,5	465	590	670	640	610	560	500	510	520	540	540
3,5	425	600	670	650	620	540	502	500	530	540	570

4,5	575	630	670	620	596	500	490	520	530	575	600
5,5	660	660	680	610	490	476	523	550	570	600	620
6,5	630	710	690	590	501	483	550	575	600	640	671
7,5	700	770	679	635	618	636	610	624	657	650	663
8,5	834	788	680	635	740	787	778	734	680	662	650
9,5	838	783	790	754	832	900	870	809	745	678	640
10,5	750	777	788	883	940	1012	996	943	820	704	633
11,2	680	750	795	924	1088	1087	1050	981	846	788	681
12,5	678	762	819	944	1100	1150	1108	1020	837	808	707
13,5	733	785	855	977	1233	1205	1164	1035	918	820	723
14,5	807	813	909	1011	1200	1290	1176	1055	920	845	770
15,5	870	882	950	1005	1270	1270	1183	1070	912	848	844
16,5	924	890	1084	1104	1349	1290	1205	1156	1033	940	888
17,5	930	913	1085	1200	1406	1332	1260	1176	1097	1108	940
18,5	936	1004	1109	1218	1300	1338	1312	1212	1133	1042	960
19,5	942	995	1106	1205	1270	1300	1305	1260	1157	1053	993
20,5	958	995	1081	1166	1207	1243	1260	1244	1120	1088	1030
21,5	959	985	1050	1110	1140	1170	1191	1150	1130	1116	1052
22,5	954	960	1015	1073	1082	1074	1108	1104	1128	1115	1046
23,5											

IV. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

вариант	Координаты вычислительной точки		вариант	Координаты вычислительной точки		вариант	Координаты вычислительной точки	
	Х км	У км		Х км	У км		Х км	У км
1	15	-9	12	12	10	23	9	2
2	15	-8	13	12	11	24	8	0
3	14	-9	14	11	10	25	8	9
4	14	-8	15	11	11	26	8	10
5	14	-7	16	9	-12	27	7	9
6	14	-2	17	9	-11	28	7	10
7	14	-1	18	10	1	29	6	-3
8	16	3	19	10	2	30	5	-5
9	16	4	20	9	-2	31	5	-4
10	16	5	21	9	-1	32	5	-3
11	16	6	22	9	0			

Для расстояния корреляции случайной части аномалии Буге можно использовать значение 2.2 км.

Плотность топографических масс 2,64 г/см³

У. ЛИТЕРАТУРА:

1. Журкин И.Г., Нейман Ю.М. Методы вычислений в геодезии. М., Недра, 1988, 304 с.
2. Мориц Г. Современная физическая геодезия. М., Недра, 1983, 392 с.
3. Огородова Л.В. Высшая геодезия. М., Геодезкартиздат, 2006, 381 с.
4. Огородова Л.В. Нормальное поле и определение аномального потенциала (текст лекций по геодезической гравиметрии и теории фигуры Земли): Учебное пособие.- М.: Изд-во МИИГАиК, 2010,- 104 с.
5. Огородова Л.В. Интерполирование астрономо-геодезических уклонений отвеса и высот квазигеоида. Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу высшей геодезии. М., МИИГАиК, 1982, 20 с.
6. Огородова Л.В. Определение ковариационной функции аномалий силы тяжести в локальной области. Методические указания. М., МИИГАиК, 1987, 18 с.
7. Огородова Л.В. Исследования локального гравитационного поля. Методические указания. М., МИИГАиК, 1989, 28 с.
8. Юркина М.И. Методы исследования фигуры Земли в гоном районе. Труды ЦНИИГАиК. вып.103. –М., Геодезиздат, 1954.
9. Jordan Stanley K.. Self-consistent statistical models for the gravity anomaly, vertical deflection and undulation of the geoid. Journal of geophysical research, July 10, 77, № 20, 1972. p. 3660-3670.

СОДЕРЖАНИЕ

I.	Методика вычисления местной аномалии высоты	стр.
1.	Введение	2
2.	Принцип вычисления местной гравиметрической аномалии высоты	3
3.	Вычисление аномалий Буге и их интерполирование.	7
4.	Вычисление влияния детерминированной части аномалий Буге на аномалию высоты	8
5.	Вычисление влияния случайной части аномалий Буге	9
6.	Учет влияния топографических масс	12
II.	Пример выполнения задания	
1.	Исходные данные	13
2.	Вычисление и интерполирование аномалии силы тяжести	14
3.	Вычисление влияния детерминированной части аномалий Буге на аномалию высоты	17
4.	Вычисление случайной части аномалии высоты	18
5.	Учет влияния топографических масс	20
III.	Приложения	
1.	Таблица функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$	21
2.	Каталог гравиметрических пунктов	22
3.	Средние высоты на трапециях 1x1 км	24
IV.	Рекомендуемые варианты заданий	26
V.	Литература	27

