Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии (МИИГАиК)

Е.А. Гонжа

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания

Рекомендовано учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области геодезии и картографии в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 — Геодезия и дистанционное зондирование с присвоением квалификации (степени) бакалавр; 21.05.01 — Прикладная геодезияс присвоением квалификации инженер-геодезист

Москва
2015

Рецензенты:
Финансовый Университет при правительстве РФ (кандидат техн. наук, **О.А**. **Баюк**);
кандидат физ.-мат. наук **В.А Попиченко** (МИИГАиК)

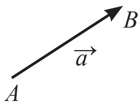
Составитель — Е.А. Гонжа
Векторная алгебра и аналитическая геометрия: Учеб.пособие. – М.: МИИГАиК, 2015г., – 40 с.

Данное учебное пособие написано в соответствии с утвержденными рабочими программами дисциплины «математика» по направлению подготовки Геодезия и дистанционное зондирование и направлению Прикладная геодезия, рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики МИИГАиК. В пособии приводятся необходимые теоретические сведения, проводится разбор типовых заданий, даются вопросы для самоконтроля. Текст написан в соответствии с действующим федеральным государственным стандартом высшего профессионального образования (ФГОС ВПО). Методические указания содержат индивидуальные расчетные задания в 25 вариантах и примеры решения типовых задач, что позволяет студентам работать над практическим материалом курса.

1. Векторная алгебра

1.1. Основные понятия

Вектор – направленный отрезок.



Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, где точка A – начало вектора, B – конец вектора. Обозначают также малой латинской буквой со стрелкой $\vec{a}$

Противоположный вектор к $\overrightarrow{AB}$ имеет начало в точке B и конец в точке A. Обозначается $\overrightarrow{BA}$ или $-\vec{a}$.

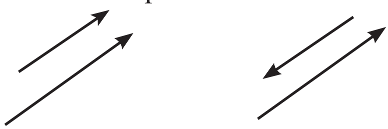
Длина (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$ – длина отрезка AB. Обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\vec{a}|$.

Нулевой вектор – вектор, длина которого равна нулю. Начало и конец такого вектора совпадают.

Единичный вектор – вектор, длина которого равна единице. Обозначается как $\vec{e}$.

Орт вектора $\vec{a}$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$. Обозначается как $\vec{a}^0$.

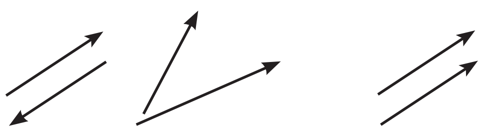
Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.



Такие векторы могут быть направлены одинаково или противоположно. Запись $\vec{a} \parallel \vec{b}$ означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Введенные таким образом векторы называются *свободными*. Сво-



а *б* *в*

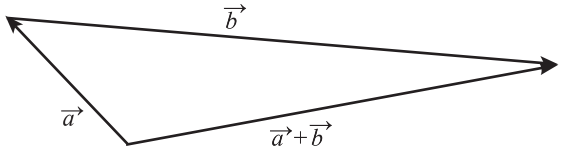
Векторы:
а, б — неравные; *в* — равные

бодный вектор можно переносить параллельно самому себе, а его начало помещать в любую точку пространства.

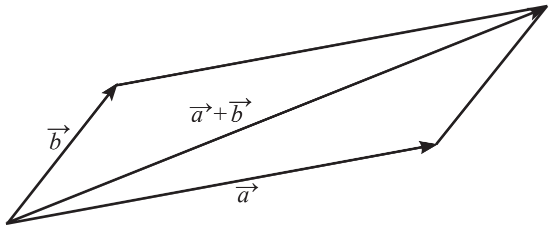
Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ *векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

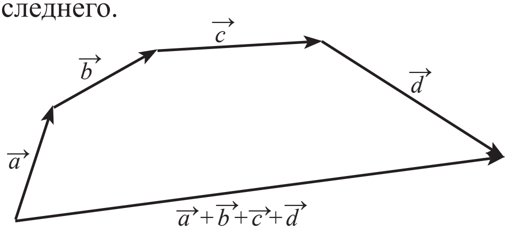
Говорят, что векторы складываются по *правилу треугольника*.



Неколлинеарные векторы можно складывать по *правилу параллелограмма*. Для этого векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ прикладывают к общему началу и на них строится параллелограмм. Сумма $\vec{a} + \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор, приложенный к их общему началу и идущий как диагональ параллелограмма.

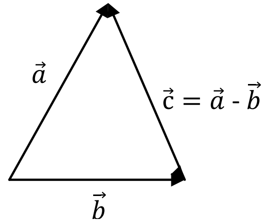


Чтобы сложить три или большее число векторов, нужно связать начало второго вектора с концом первого, начало третьего вектора с концом второго и так далее. Суммарный вектор есть вектор, идущий из начала первого в конец последнего.



Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с $\vec{b}$ дает $\vec{a}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, коллинеарный $\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, направленный по вектору $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$.



Имеют место следующие свойства произведения вектора на число:

Если $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и наоборот, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ($\vec{a} \neq 0$), то существует такое число λ, что $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Всегда $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, то есть всякий вектор равен произведению его

модуля на орт.

1.2. Понятие базиса на плоскости и в пространстве

Линейной комбинацией пространственных векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ называется выражение вида $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \overrightarrow{a_3}$, где α_1, α_2, α_3 — числа.

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ называются *линейно независимыми*, если равенство $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \overrightarrow{a_3} = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда все числа α_1, α_2, α_3 равны нулю.

Аналогичные определения даются для векторов на плоскости.

Три линейно независимых вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют в пространстве *базис*, если для всякого вектора $\vec{d}$ из этого пространства существуют такие числа λ, μ, ν, что $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}$.

Два лежащих в плоскости линейно независимых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют *базис*, если для всякого вектора $\vec{c}$ из этой плоскости существуют такие числа λ, μ, что $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$.

Справедливы следующие утверждения:

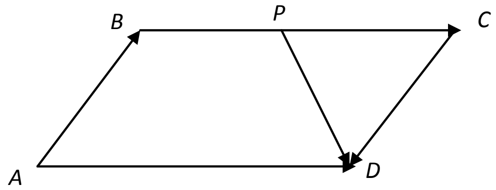
Любая тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует в пространстве *базис*.

Любая пара лежащих в плоскости неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образует *базис* на этой плоскости.

Каждый вектор может быть единственным образом разложен по базису (на плоскости и в пространстве).

Пример. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка P является серединой стороны BC. Найти координаты вектора $\overrightarrow{PD}$, если за базисные векторы приняты векторы $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AB}$.

Решение. Изобразим параллелограмм на чертеже. Его вершины и точки P и D связываем векторами.

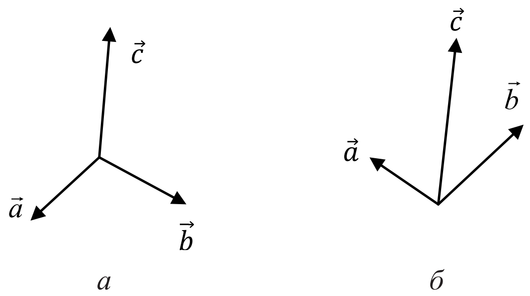


По правилу сложения свободных векторов имеем: $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$.

Значит,

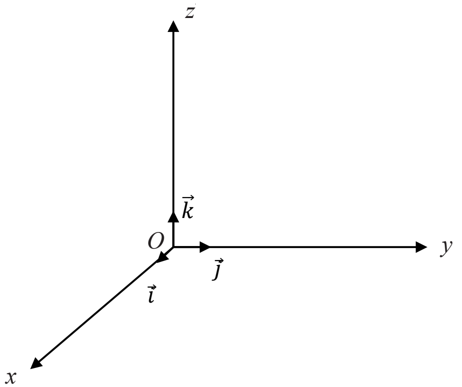
$\overrightarrow{PD} = \left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.

Базис в пространстве может образовываться правой и левой тройками некомпланарных векторов. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в указанном порядке образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден против движения стрелки часов, и *левую тройку*, если по движению стрелки часов

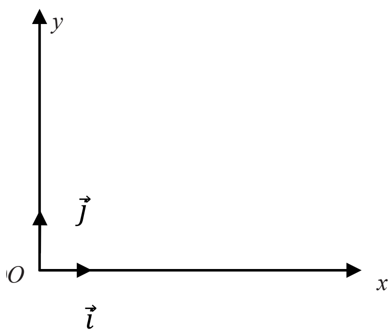


а — правая тройка; *б* — левая тройка

Возьмем в качестве базиса в пространстве векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, которые имеют единичную длину, взаимно перпендикулярны и образуют в указанном порядке правую тройку. Свяжем с базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ оси Ox, Oy, Oz как показано на рисунке ниже.



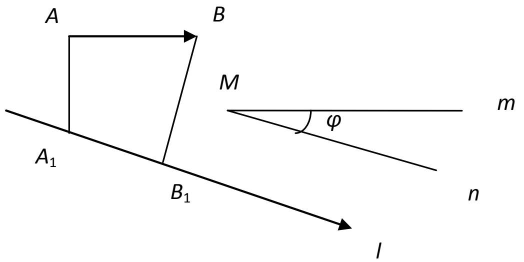
Получили декартову правую прямоугольную координатную систему в пространстве. Декартова прямоугольная координатная система на плоскости образуется базисными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$.



1.3. Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы

Пусть в пространстве задана направленная ось l и ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть A_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных на ось l из точек A и B соответственно.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ *на направленную ось* l называется число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l направлены одинаково и число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l направлены противоположно. Обозначается $\text{пр}_l\,\overrightarrow{A_1B_1}$. Если $\overrightarrow{A_1B_1} = 0$, то принимается, что $\text{пр}_l\,\overrightarrow{A_1B_1} = 0$.



Угол φ *между вектором* $\overrightarrow{A_1B_1}$ *и осью* l – угол между лучами m и n, выходящих из произвольной точки M пространства так, что луч m направлен по $\overrightarrow{AB}$, а луч n – по направлению оси l.

Основные свойства проекций:

$$\text{пр}_l \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi; \text{пр}_l (\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) = \text{пр}_l \overrightarrow{a_1} + \text{пр}_l \overrightarrow{a_2}; \text{пр}_l \overrightarrow{\lambda a} = \lambda \text{пр}_l \vec{a}.$$

Для обозначения угла между вектором и направленной осью а также между векторами будем пользоваться обозначением вида $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{AB}, l})$

Можно показать, что в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ произвольный вектор $\vec{a}$ пространства может быть представлен в виде

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

где $a_x = \text{пр}_x \vec{a}$, $a_y = \text{пр}_y \vec{a}$, $a_z = \text{пр}_z \vec{a}$. Это *формула разложения вектора по ортам координатных осей*. Числа a_x, a_y, a_z называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в системе $Oxyz$. Кратко записывают в виде $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Введем углы между вектором $\vec{a}$ и координатными осями Ox, Oy, Oz: $\alpha = (\widehat{\vec{a}, Ox}); \beta = (\widehat{\vec{a}, Oy}); \gamma = (\widehat{\vec{a}, Oz})$. Справедливы следующие формулы:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$. Они связаны равенством: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Для орта вектора имеем: $\vec{a}^0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями, то есть $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$, $\overrightarrow{\lambda a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$, $\vec{a} = \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов:

векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

По определению *координаты точки M* – это координаты вектора $\overrightarrow{OM}$. Записывают в виде $M(x; y; z)$.

Пусть даны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся так: $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

1.4. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \text{ где } \varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Так как $\text{пр}_b \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$ и $\text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_b \vec{a}.$$

Отсюда, например $\text{пр}_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$. .

Основные свойства скалярного произведения:

$$a \cdot b = b \cdot a; (\lambda \cdot a) \cdot b = \lambda \cdot (a \cdot b); a \cdot (b + c) = ab + ac; \; a^2 = a \cdot a = |a|^2.$$

Необходимое и достаточное условие ортогональности двух ненулевых векторов:

если $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ и эти векторы ортогональны, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и наоборот, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

Вычисление скалярного произведения векторов по координатам векторов:

пусть $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Вычисление косинуса угла между векторами по координатам векторов:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Вычисление проекции вектора на заданное направление по координатам вектора:

$$\text{пр}_b\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Пример. Найти длину вектора $\vec{x}=5\vec{p}-\sqrt{11}\vec{q}$, если $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — ортогональные орты.

Решение. Воспользуемся формулой $\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\vec{x}^2}$. Тогда, учитывая что $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ и $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$, получим:

$$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{(5\vec{p}-\sqrt{11}\vec{q})^2}=\sqrt{25\vec{p}^2-10\sqrt{11}\vec{p}\vec{q}+11\vec{q}^2}=$$

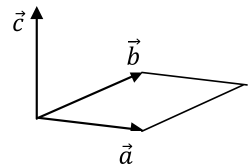
$$=\sqrt{25\left|\vec{p}\right|^2-10\sqrt{11}\vec{p}\vec{q}+11\left|\vec{q}\right|^2}=\sqrt{25+11}=6.$$

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, определяемый следующими тремя условиями:

1) вектор $\vec{c}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в указанном порядке образуют правую тройку векторов.



Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\times\vec{b}$ и пишут $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Основные свойства векторного произведения:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a};\ (\lambda\cdot\vec{a})\times\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b});\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}\times\vec{b}=0$ и наоборот, если $\vec{a}\times\vec{b}=0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Вычисление векторного произведения векторов по координатам векторов:

пусть $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда их векторное произведение находится через определитель третьего порядка по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} - \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

.

Пример. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 120° и $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. Вычислить

$[(\vec{a} + 4\vec{b})\times(3\vec{a} - \vec{b})]^2$.

Решение. Воспользуемся алгебраическими свойствами векторного произведения векторов и формулой вычисления модуля векторного произведения векторов:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{a}\times\vec{a} = 0,\ \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a},\ (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}+\vec{b})$$

где α — число, $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Тогда:

$$(\vec{a}+4\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b}) = 3(\vec{a}\times\vec{a}) + 12(\vec{b}\times\vec{a}) - \vec{a}\times\vec{b} - 4(\vec{b}\times\vec{b}) =$$

$$= -12(\vec{a}\times\vec{b}) - \vec{a}\times\vec{b} = -13(\vec{a}\times\vec{b}).$$

А значит

$$[(\vec{a}+4\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})]^2 = [-13(\vec{a}\times\vec{b})]^2 = 169\left|(\vec{a}\times\vec{b})\right|^2 =$$

$$= 169(|\vec{a}||\vec{b}|\sin 120°)^2 = 507.$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, то есть $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения: смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка векторов правая, и со знаком минус, если эта тройка левая.

Основные свойства смешанного произведения:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b};\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Ввиду этого смешанное произведение кратко записывают как $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b};\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c};\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, то есть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ и наоборот, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

Вычисление смешанного произведения векторов по координатам векторов:

пусть $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$. Тогда их смешанное произведение находится через определитель третьего порядка по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} - a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

Пример. Доказать, что четыре точки $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 3)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$, $D(2;\ 1;\ 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Построим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Находим координаты этих векторов:

$\overrightarrow{AB} = \{-1; -1; 4\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-2; 0; 2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{1; -1; 4\}$.

Эти три вектора имеют в точке А общее начало. Заданные точки будут располагаться в одной плоскости в случае компланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является условие равенства нулю их смешанного произведения. Имеем:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 8 = 0$$

Следовательно, четыре заданные точки лежат в одной плоскости.

1.5. Контрольные вопросы:

4. Что называется вектором?
5. Какие координаты имеет орт вектора?
6. Могут ли разнонаправленные векторы быть коллинеарными?
7. Какое из условий $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$. или $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$ является условием ортогональности? Коллинеарности?
8. Могут ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$ быть компланарными?
9. Что означают векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$?

10. Эквивалентны ли записи $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$?
11. Изобразите левую и правую тройки некомпланарных векторов.
12. Как проверить ориентацию тройки некомпланарных векторов?
13. Запишите условие компланарности трех векторов.

1.6. Расчетное задание

Даны координаты четырех точек в пространстве A_1, A_2, A_3, A_4 (см. табл. 1). Требуется решить следующие задачи:

1) записать векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$, в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; найти модули этих векторов и их направляющие косинусы;

2) найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_3A_4}$;

3) найти проекцию вектора $\overrightarrow{A_3A_4}$ на направление вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$;

4) доказать неколлинеарность векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$; найти площадь треугольника $A_1A_2A_3$, его высоту из вершины A_2;

5) доказать некомпланарность векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$; найти объем пирамиды $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$, ее высоту из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Таблица 1

1. $A_1(1; 3; 6)$ $A_2(2; 2; 1)$ $A_3(-1; 0; 1)$ $A_4(-4; 6; -3)$	2. $A_1(-4; 2; 6)$ $A_2(2; -3; 0)$ $A_3(-10; 5; 8)$ $A_4(-5; 2; -4)$	3. $A_1(7; 2; 4)$ $A_2(7; -1; -2)$ $A_3(3; 3; 1)$ $A_4(-4; 2; 1)$
4. $A_1(2; 1; 4)$ $A_2(-1; 5; -2)$ $A_3(-7; -3; 2)$ $A_4(-6; -3; 6)$	5. $A_1(1; 1; 2)$ $A_2(-1; 1; 3)$ $A_3(2; -2; 4)$ $A_4(-1; 0; -2)$	6. $A_1(1; 0; 2)$ $A_2(1; 2; -1)$ $A_3(2; -2; 1)$ $A_4(2; 1; 0)$
7. $A_1(-1; -5; 2)$ $A_2(-6; 0; -3)$ $A_3(3; 6; -3)$ $A_4(-10; 6; 7)$	8. $A_1(2; 3; 1)$ $A_2(4; 1; -2)$ $A_3(6; 3; 7)$ $A_4(7; 5; -3)$	9. $A_1(1; 2; -3)$ $A_2(1; 0; 1)$ $A_3(-2; -1; 6)$ $A_4(0; -5; -4)$
10. $A_1(0; -1; -1)$ $A_2(-2; 3; 5)$ $A_3(1; -5; -9)$ $A_4(-1; -6; 3)$	11. $A_1(1; 1; -1)$ $A_2(2; 3; 1)$ $A_3(3; 2; 1)$ $A_4(5; 9; -8)$	12. $A_1(3; 10; -1)$ $A_2(-2; 3; -5)$ $A_3(-6; 0; -3)$ $A_4(1; -1; 2)$
13. $A_1(5; 2; 0)$ $A_2(2; 5; 0)$ $A_3(1; 2; 4)$ $A_4(-1; 1; 1)$	14. $A_1(1; 5; -7)$ $A_2(-3; 6; 3)$ $A_3(-2; 7; 3)$ $A_4(-4; 8; -12)$	15. $A_1(-1; 2; 4)$ $A_2(-1; -2; -4)$ $A_3(3; 0; -1)$ $A_4(7; -3; 1)$

16. $A_1(2; -1; -2)$ $A_2(1; 2; 1)$ $A_3(5; 0; -6)$ $A_4(-10; 9; -7)$	17. $A_1(-3; 4; -7)$ $A_2(1; 5; -4)$ $A_3(-5; -2; 0)$ $A_4(2; 5; 4)$	18. $A_1(0; -3; 1)$ $A_2(-4; 1; 2)$ $A_3(2; -1; 5)$ $A_4(3; 1; -4)$
19. $A_1(-2; 0; -4)$ $A_2(-1; 7; 1)$ $A_3(4; -8; -4)$ $A_4(1; -4; 6)$	20. $A_1(-1; 2; -3)$ $A_2(4; -1; 0)$ $A_3(2; 1; -2)$ $A_4(3; 4; 5)$	21. $A_1(1; 3; 0)$ $A_2(4; -1; 2)$ $A_3(3; 0; 1)$ $A_4(-4; 3; 5)$
22. $A_1(14; 4; 5)$ $A_2(-5; -3; 2)$ $A_3(-2; -6; -3)$ $A_4(-2; 2; -1)$	23. $A_1(4; -1; 3)$ $A_2(-2; 1; 0)$ $A_3(0; -5; 1)$ $A_4(3; 2; -6)$	24. $A_1(-2; -1; -1)$ $A_2(0; 3; 2)$ $A_3(3; 1; -4)$ $A_4(-4; 7; 3)$
25. $\mathrm{A}_1(2; -1; 2)$ $A_2(1; 2; -1)$ $A_3(3; 2; 1)$ $A_4(-4; 2; 5)$		

1.7. Решение типовых задач

Задача. Даны координаты четырех точек в пространстве $A_1(2; 3; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$, $A_3(6; 3; 7)$, $A_4(-5; -4; 8)$

1) записать векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; найти модули этих векторов и их направляющие косинусы;

2) найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_3A_4}$;

3) найти проекцию вектора $\overrightarrow{A_3A_4}$ на направление вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$;

4) доказать неколлинеарность векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$; найти площадь треугольника $A_1A_2A_3$, его высоту из вершины A_2;

5) доказать некомпланарность векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$; найти объем пирамиды $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$, ее высоту из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение:

1. Находим координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$:
$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2; -2; -3\}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \{4; 0; 6\}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = \{-7; -7; 7\}$. Это координаты векторов в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Находим их модули:
$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{2^2+2^2+3^2} = \sqrt{17}$, $|\overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{4^2+0^2+6^2} = \sqrt{52}$, $|\overrightarrow{A_1A_4}| = \sqrt{7^2+7^2+7^2} = \sqrt{147}$. Теперь находим орты векторов:

$$\overrightarrow{A_1A_2}^0 = \left\{\frac{2}{\sqrt{17}}; \frac{-2}{\sqrt{17}}; \frac{-3}{\sqrt{17}}\right\}; \quad \overrightarrow{A_1A_3}^0 = \left\{\frac{4}{\sqrt{52}}; 0; \frac{6}{\sqrt{52}}\right\};$$

$$\overrightarrow{A_1A_4}^0 = \left\{\frac{-7}{\sqrt{147}}; \frac{-7}{\sqrt{147}}; \frac{7}{\sqrt{147}}\right\}.$$

Направляющие косинусы векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ — координаты их ортов.

2. Находим косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_3A_4}$. Так как $\overrightarrow{A_3A_4} = \{-11; -7; 1\}$, то

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_3A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_3A_4}\right|} = \frac{2\cdot(-11)+(-2)\cdot(-7)+(-3)\cdot 1}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{11^2+7^2+1^2}} = \frac{-11}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{171}} \approx -0,204.$$

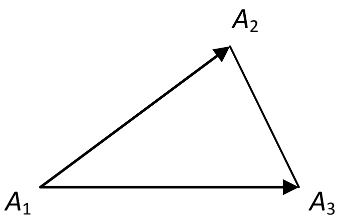
По калькулятору находим φ ≈ $101,77^0$.

3. Находим проекцию вектора $\overrightarrow{A_3A_4}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{A_1A_2}}\overrightarrow{A_3A_4} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_3A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|} = \frac{2\cdot(-11)+(-2)\cdot(-7)+(-3)\cdot 1}{\sqrt{17}} = \frac{-11}{\sqrt{17}} \approx -2,667.$$

4. Чтобы доказать неколлинеарность векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, надо проверить пропорциональность их координат. Имеем:

$\frac{2}{4} \neq \frac{-2}{0} \neq \frac{-3}{6}$. Следовательно векторы неколлинеарны. Находим площадь S треугольника $A_1A_2A_3$. Свяжем вершины треугольника векторами, как показано на рисунке.



Воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$. Сначала находим векторное произведение:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Тогда $S = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2} = 14.$

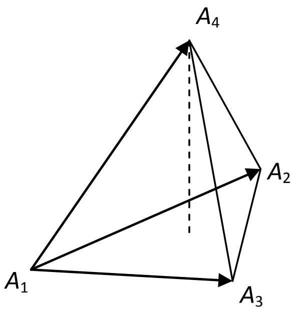
5. Чтобы доказать некомпланарность векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, проверим равенство 0 их смешанного произведения. Имеем

$$\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ -7 & -7 & 7\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}0 & 6\\ -7 & 7\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}4 & 6\\ -7 & 7\end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix}4 & 0\\ -7 & -7\end{vmatrix}=$$

$$=84+140+84=308\neq 0,$$

следовательно, векторы некомпланарны.

Находим объем V пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Свяжем вершины пирамиды векторами, как показано на рисунке.



Воспользуемся формулой $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\frac{308}{6}=\frac{154}{3}$. Находим высоту пирамиды, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Из стереометрии известно, что искомая высота H пирамиды находится по формуле $H=\frac{154}{14}=11,$ где V – объем пирамиды, S – площадь ее основания. Тогда $H=\frac{154}{14}=11,$

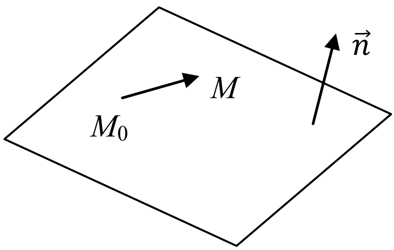
2. Плоскость и прямая в пространстве

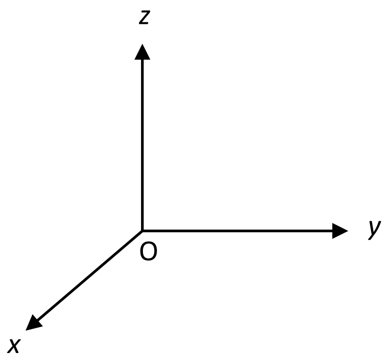
2.1. Уравнения плоскости

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и имеющей данный нормальный вектор. Пусть в пространстве задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$. Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярная к ненулевому вектору $\vec{n}$ (*нормальному вектору*) представляется следующим уравнением:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это уравнение отражает тот факт, что вектор $\vec{n}$ ортогонален любому вектору $\overrightarrow{M_0M}$ на плоскости. Точка $M(x; y; z)$ – произвольная точка плоскости.





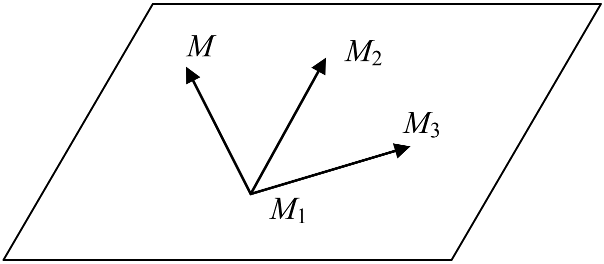
Общее уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$A_x + B_y + C_z + D = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Пусть в пространстве заданы три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ не лежащие на одной прямой. Проходящая через них плоскость представляется уравнением:

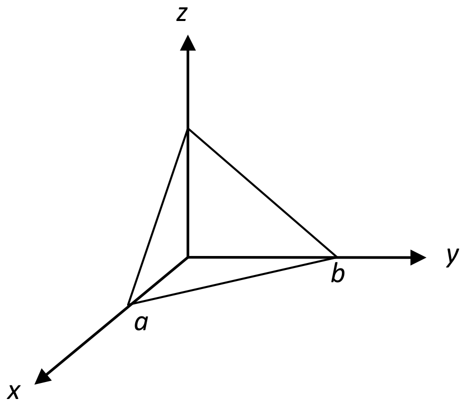
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение отражает компланарность векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$. Точка $M(x; y; z)$ – произвольная точка плоскости.



Уравнение плоскости в отрезках. Пусть плоскость проходит через три точки $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$, отсекая на координатных осях не равные нулю отрезки a, b, c. Тогда ее уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$



Нормальное уравнение плоскости:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы нормального вектора плоскости $\vec{n}$; p – расстояние от начала координат до плоскости. Считается, что вектор $\vec{n}$ направлен от начала координат к плоскости (начало вектора $\vec{n}$ связывают с началом координатной системы и смотрят его направление – к плоскости или от плоскости).

Общее уравнение плоскости $A_x + B_y + C_z + D = 0$ приводится к нормальному виду умножением на нормирующий множитель $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Знак нормирующего множителя берется противоположным знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

Пример. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $P(-1; 2; 2)$, параллельно векторам $\vec{a} = \{2; -2; 3\}$ и $\vec{b} = \{4; 1; 5\}$.

Решение. Вначале находим нормальный вектор $\vec{n}$ искомой плоскости по формуле

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}.$$

Получили, что $\vec{n} = \{-13; 2; 10\}$.

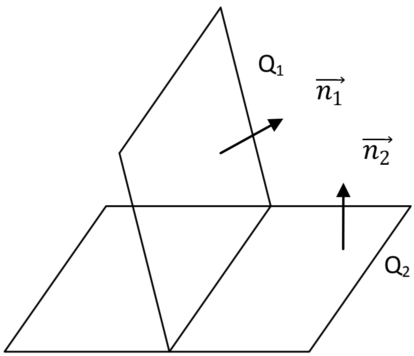
Теперь составим уравнение плоскости, которая проходит через заданную точку P и перпендикулярна вектору $\vec{n}$:

$$-13(x + 1) + 2(y - 2) + 10(z - 2) = 0.$$

Отсюда находим общее уравнение искомой плоскости:

$$-13x + 2y + 10z - 37 = 0.$$

Угол между плоскостями. Под углом между плоскостями понимается один из двугранных углов, образованный этими плоскостями (либо острый, либо тупой).



Пусть плоскости заданы своими общими уравнениями

$$(Q_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ ;$$
$$(Q_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

За угол φ между плоскостями (Q_1) и (Q_2) принимается угол между нормальными векторами плоскостей $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$

и его косинус находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие ортогональности двух плоскостей. Если плоскость (Q_1) ортогональна плоскости (Q_2), то их нормальные векторы будут также ортогональны, а тогда $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ и

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

Условие параллельности двух плоскостей. Если плоскость (Q_1) параллельна плоскости (Q_2), то их нормальные векторы коллинеарны, а тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Расстояние от точки до плоскости. Пусть в пространстве задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость (Q): $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости (Q) находится по формуле

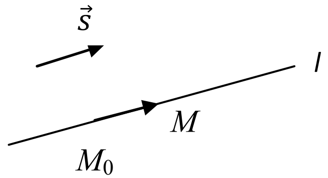
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.2. Уравнения прямой в пространстве

Канонические уравнения прямой. Пусть в пространстве задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{s} = \{m; n; p\}$. Уравнения прямой (l), которая проходит через точку M_0 и которая параллельна вектору $\vec{s}$, имеют следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Эти уравнения называются каноническими и отражают тот факт, что вектор $\vec{s}$, который называется *направляющим вектором* прямой, коллинеарен вектору $\overline{M_0M}$. Точка $M(x; y; z)$ – произвольная точка прямой (l).



Параметрические уравнения прямой. Запишем канонические уравнения прямой в виде

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t,$ где t – параметр. Решая каждое из трех записанных таким образом уравнений относительно x, y, z, получим параметрические уравнения прямой

$$x = x_0 + mt;\ y = y_0 + nt;\ z = z_0 + pt.$$

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Уравнения прямой, проходящей через эти точки, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Эти уравнения получаются из канонических уравнений прямой, если взять за точку на прямой точку M_1 а за направляющий вектор – вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.

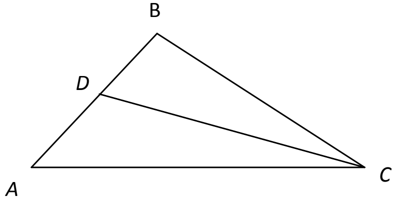
Общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

где нормальные векторы плоскостей $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ не коллинеарны. Здесь прямая определяется как линия пересечения двух непараллельных плоскостей.

Пример. Даны вершины треугольника $A(2; –3; 4)$, $B(5; –1; –2)$, $C(4; –2; 5)$. Составить параметрические уравнения его медианы CD.

Решение. Изобразим треугольник ABC и его медиану CD на чертеже.



Находим координаты x_D, y_D, z_D точки D по формулам:

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+5}{2}=3{,}5;\quad y_D=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-3-1}{2}=-2;$$

$$z_D = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Вектор $\overrightarrow{CD}$ является направляющим вектором медианы CD. Его координаты находим по формуле:

$$\overrightarrow{CD} = \{x_D - x_C;\, y_D - y_C;\, z_D - z_C\} = \{3,5-4;\, -2+2;\, 1-5\} = \{-0,5; 0; -4\}.$$

Теперь запишем параметрические уравнения медианы CD как прямой, проходящей через точку $C(4; -2; 5)$ и имеющей направляющий вектор $\overrightarrow{CD} = \{-0,5; 0; -4\}$:

$x = 4 + 0,5t$; $y = -2$; $z = 5 + 4t$.

Расстояние от точки до прямой. Пусть в пространстве задана точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и прямая (l) своими каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. Расстояние d от точки M_1 до прямой (l) находится по формуле

$$d = \frac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{s}|},$$

где $\vec{s} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой (l), $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка прямой.

Угол между прямыми. Пусть прямые (l_1) и (l_2) заданы своими каноническими уравнениями

$$(l_1): \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

$$(l_2): \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

За угол между прямыми (l_1) и (l_2) принимается угол φ, образованный направляющими векторами прямых $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ и его косинус находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие ортогональности двух прямых:

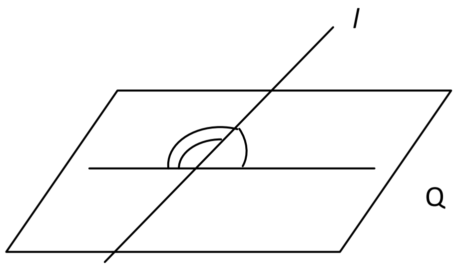
$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0.$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

2.3. Прямая и плоскость в пространстве

Угол между прямой и плоскостью. За угол между прямой и плоскостью принимается угол, образованный этой прямой и ее проекцией на рассматриваемую плоскость.



Здесь определяются два угла – острый и тупой. Выбирается один из них.

Пусть плоскость (Q) задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая (l) задана каноническими уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.
Синус угла φ между прямой (l) и плоскостью (Q) вычисляется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$A\cdot m + B\cdot n + C\cdot p = 0.$$

Условие ортогональности прямой и плоскости:

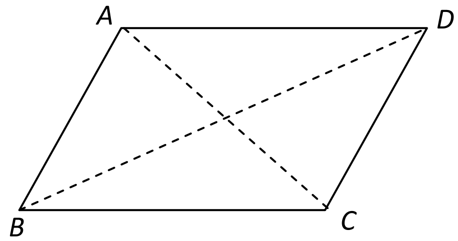
$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Замечание. Уравнения прямой на плоскости получаются путем исключения входящих в пространственные уравнения компонент, относящихся к переменной z. Например из канонического уравнения прямой в пространстве получаются уравнения прямой на плоскости вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Пример. Стороны AB и BC параллелограмма заданы уравнениями $2x - y + 5 = 0$ и $x - 2y + 4 = 0$. Диагонали его пересекаются в точке $M(1; 4)$. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

Решение. Изобразим параллелограмм на чертеже.



Находим координаты точки пересечения прямых AB и BC, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ x-2y+4 \end{cases}.$$

Это будет точка $B(–2; 1)$. Теперь найдем координаты точки D, которые обозначим как x_D и y_D. Так как точка M находится на середине отрезка BD, то должны выполняться равенства:

$$\frac{x_D-2}{2}=1; \quad \frac{y_D+1}{2}=4.$$

Отсюда находим $x_D= 4$, $y_D= 7$ и $D(4; 7)$.

Угловые коэффициенты прямых AB и CD совпадают и равны 2. Уравнение прямой CD находим из условия, что ее угловой коэффициент равен 2 и она проходит через точку $D(4;7)$:

$$y - 7 = 2(x - 4), \text{ или } 2x - y - 1 = 0.$$

Аналогично находим уравнение прямой AD:

$$x - 2y + 10 = 0.$$

2.4. Контрольные вопросы

1. Какие Вы знаете уравнения плоскости?

2. Какой смысл имеют коэффициенты A, B, C в уравнении плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0$?

3. Плоскость проходит через ось O_z. Какие из коэффициентов A, B, C, D в этом случае равны 0?

4. Какой смысл имеют коэффициенты a, b, c в уравнении плоскости $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$?

5. Укажите нормирующий множитель для перехода от общего уравнения плоскости к нормальному.

6. Какие Вы знаете уравнения прямой в пространстве?

7. Какой смысл имеют коэффициенты m, n, p в уравнении прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$?

8. Определяет ли прямую система

$$\begin{cases} x+3y-2z+3=0, \\ 2x+6y-4z+7=0 \end{cases}?$$

2.5. Расчетное задание

Даны координаты четырех точек в пространстве A_1, A_2, A_3, A_4 (см. табл.1). Требуется решить следующие задачи:

1) составить уравнение плоскости Q, проходящей через точки A_1, A_2, A_3;

2) составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости Q;

3) найти координаты точки пересечения такой прямой с плоскостью Q;

4) найти расстояние от точки A_4 до плоскости Q;

5) составить уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 параллельно плоскости Q;

6) составить уравнение плоскости, проходящей через точки A_1 и A_4 перпендикулярно плоскости Q;

7) найти косинус угла между плоскостью Q и плоскостью, проходящей через точки A_1, A_3, A_4;

8) найти синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью Q.

2.5. Решение типовых задач

Задача 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A_1(3; -1; 2)$, $A_2(4; -1; -1)$, $A_3(2; 0; 2)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель третьего порядка:
$3(x-3)+3(y+1)+z-2=0$, или $3x+3y+z-8=0$.

Задача 2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-1; 2; 1)$ перпендикулярно плоскости $3x-2y+z-12=0$.

Решение. В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять нормальный вектор заданной плоскости, то есть считаем $\vec{s}=\{3; -2; 1\}$. Тогда канонические уравнения прямой записываются в виде

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}.$$

Задача 3. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+6}{-1}$ и плоскости $2x-6y-z+1=0$.

Решение. Запишем уравнения заданной прямой в параметрическом виде:

$x=1+2t$; $y=2+3t$; $z=6+t$.

Пусть значение параметра $t=t_a$ соответствует точке $A(x_a; y_a; z_a)$ пересечения прямой и плоскости. Тогда значение t_a находится из уравнения:

$2(1+2t_a)-6(2+3t_a)-(6+t_a)+1=0$.

Решая его, получим $t_a=-1$.

Координаты точки пересечения $A(x_a; y_a; z_a)$ находим из параметрических уравнений прямой при $t=-1$:

$x_a=1+2(-1)=-1$; $y_a=2+3(-1)=-1$; $z_a=6-1=5$.

Значит, точка $A(-1; -1; 5)$ есть точка пересечения прямой и плоскости.

Задача 4. Найти расстояние от точки $A(-2; -4; 3)$ до плоскости $2x-y+2z+3=0$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$d=\frac{|Ax_o+By_0+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2-(-2)-1(-4)+2\cdot 3+3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3.$$

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -1; 6)$ параллельно плоскости $x+y-2z+5=0$.

Решение. В качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять нормальный вектор заданной плоскости $\vec{n} = \{1;\ 1;\ -2\}$. Искомая плоскость представляется уравнением

$1(x-2)+1(y+1)-2(z-6)=0$, или $x+y-2z+11=0$.

Задача 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A_1(1;\ 2;\ 3)$ и $A_2(2;\ 1;\ 1)$ перпендикулярно плоскости $3x+4y+z-6=0$.

Решение. Пусть точка $M(x;\ y;\ z)$ принадлежит искомой плоскости. Тогда векторы $\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{A_2M}$ и нормальный вектор заданной плоскости $\vec{n} = \{3;\ 4;\ 1\}$ должны быть комплонарны. Значит выполняется условие

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель третьего порядка, получим искомое уравнение плоскости

$x-y+z-2=0$.

Задача 7. Найти косинус угла между плоскостями $x-y\sqrt{2}+z-1=0$ и $x+y\sqrt{2}-z+3=0.$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} = \frac{1\cdot 1-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-1\cdot 1}{\sqrt{1+2+1}\cdot\sqrt{1+2+1}} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 8. Найти синус угла между прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{6}$ и плоскостью $6x+15y-10z+31=0$.

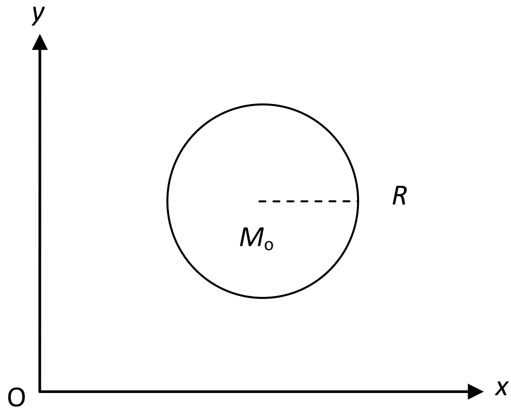
Решение. Воспользуемся формулой

$$\sin\varphi = \frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} = \frac{\left|6\cdot 2+15\cdot 3+(-10)\cdot 6\right|}{\sqrt{6^2+15^2+10^2}\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{3}{133}.$$

3. Линии второго порядка на плоскости

3.1. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, расстояние которых до заданной точки $M_0(x_0;\ y_0)$ есть постоянное положительное число R.



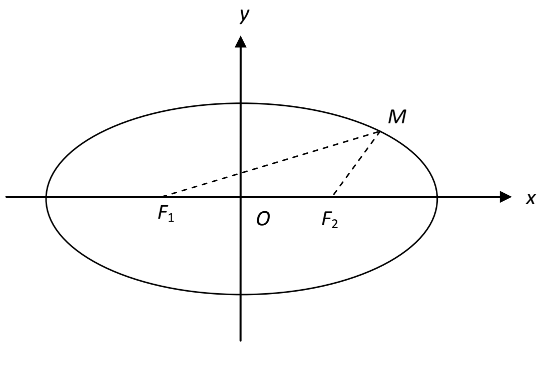
Каноническое уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где точка Mo(x0; yo) – центр окружности; R – радиус окружности.

3.2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть положительная постоянная, равная $2a$.



Точки F_1 и F_2 называются *фокусами эллипса*. Расстояние $2c$ между фокусами называется *фокусным расстоянием*. Число a называется *большой полуосью* эллипса. *Центр эллипса* – середина отрезка $F_1 F_2$. *Фокальная (первая)* ось эллипса — прямая, проходящая через фокусы F_1 и F_2. *Вторая ось* эллипса – прямая, проходящая через центр эллипса перпендикулярно к фокальной оси. Число $e = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса. Для эксцентриситета эллипса выполняется неравенство $e < 1$. Эксцентриситет эллипса равен нулю, то есть е = 0, тогда и только тогда, когда эллипс – окружность.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a – *большая полуось* эллипса; b – *малая полуось* эллипса, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Соответствующая координатная система называется канонической.

Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит эллипсу. Расстояние от точки M до фокуса F_1 называется *первым фокальным радиусом* и обозначается как r_1, а расстояние от точки M до фокуса F_2 – *вторым фокальным радиусом* и обозначается как r_2. Фокальные радиусы находятся по формулам $r_1 = a + ex$; $r_2 = a - ex$.

В случае, когда фокусы эллипса находятся на оси Oy, то есть $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, то каноническое уравнение такого эллипса имеет вид:

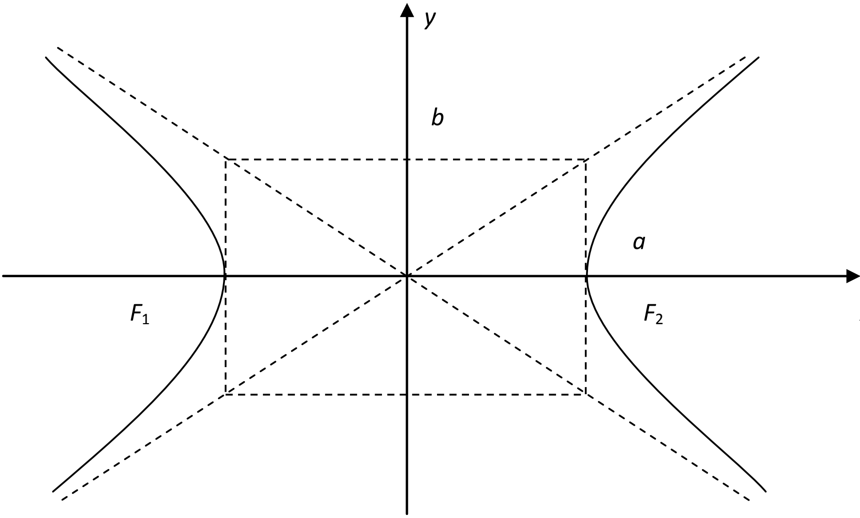
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Директрисой эллипса, соответствующей данному фокусу F, называется прямая d, перпендикулярная к фокальной оси, отстоящая от центра на расстояние $\frac{a}{e}$ и лежащая по ту же сторону от центра, что и фокус F. У эллипса две директрисы, уравнения которых имеют вид $x = \pm\frac{a}{e}$.

3.3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть положительная постоянная, равное $2a$.

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами гиперболы*. Расстояние $2c$ между фокусами называется *фокусным расстоянием*. Число a называется *первой полуосью* гиперболы. *Центр гиперболы* – середина отрезка F_1F_2.



Фокальная (первая) ось гиперболы — прямая, проходящая через фокусы F_1 и F_2. *Вторая ось* гиперболы – прямая, проходящая через центр гиперболы перпендикулярно к первой оси. Число $e = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Для эксцентриситета гиперболы выполняется неравенство е > 1.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a – первая полуось гиперболы; b – мнимая полуось гиперболы, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Соответствующая координатная система называется канонической.

Асимптоты гиперболы – прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Пусть точка $M(x; y)$ находится на одной из ветвей гиперболы. Расстояние от точки M до фокуса F_1 называется *первым фокальным радиусом* и обозначается как r_1, а расстояние от точки M до фокуса F_2 – *вторым фокальным радиусом* и обозначается как r_2. Фокальные радиусы находятся по формулам:

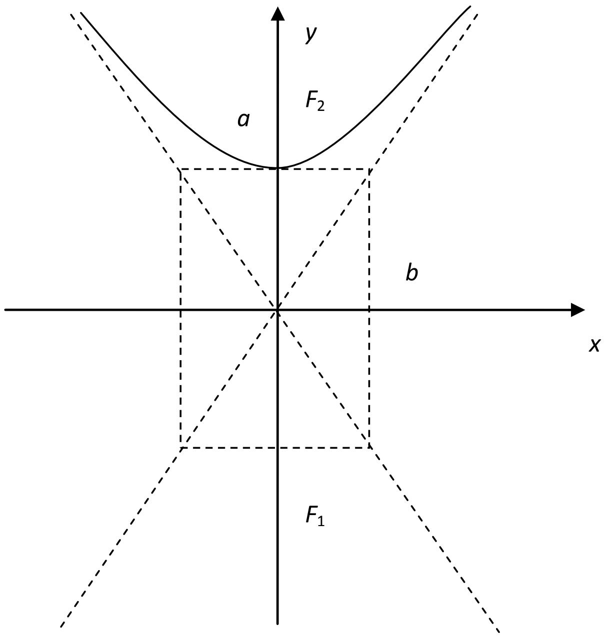
$$r_1 = a + ex \text{ при } x > 0;$$
$$r_2 = -a + ex \text{ при } x > 0;$$

$$r_1 = –a – ex \text{ при } x < 0;$$
$$r_2 = a – ex \text{ при } x < 0.$$

Ели фокусы гиперболы располагаются на оси Oy канонической системы координат, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Такая гипербола называется *сопряженной*.



Директрисой гиперболы, соответствующей данному фокусу F, называется прямая d, перпендикулярная к фокальной оси, отстоящая от центра на расстояние $\frac{a}{e}$ и лежащая по ту же сторону от центра, что и фокус F. У гиперболы две директрисы, уравнения которых имеют вид $x = \pm\frac{a}{e}$.

3.4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки (называемой фокусом параболы) и некоторой фиксированной прямой (называемой директрисой параболы). В канонической системе координат парабола изображается рисунком, представленном ниже.

Фокальная ось параболы (или просто ось параболы) — прямая, проходящая через фокус F перпендикулярно директрисе.

Вершина параболы – точка пересечения параболы с ее осью. Это точка $O(0; 0)$ канонической системы координат.

Каноническое уравнение параболы имеет вид

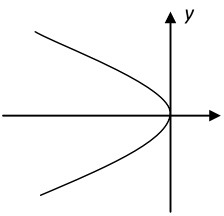
$$y^2 = 2px,$$

где p — расстояние между фокусом и директрисой, которое называется *фокальным параметром* или просто *параметром* параболы.

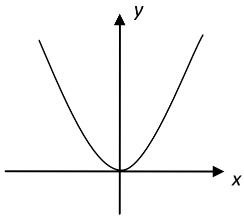
Пусть точка $M(x; y)$ находится на параболе. Расстояние от точки M до фокуса F называется *фокальным радиусом* и обозначается как r. Фокальный радиус находится по формуле $r = x + \dfrac{p}{2}$.

Эксцентриситет параболы принимается равным единице, то есть для параболы $e = 1$.

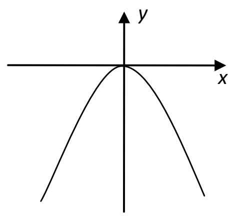
Приведенное выше каноническое уравнение описывает параболу, ветви которой направлены вправо. Уравнение $y^2 = -2px$ описывает параболу, ветви которой направлены влево. Парабола $x^2 = 2py$ имеет ветви, направленные вверх, а парабола $x^2 = -2py$ — ветви, направленные вниз.



$y^2 = -2px$



$x^2 = 2py$



$x^2 = -2py$

3.5. Приведение общего уравнения линии второго порядка к простейшему виду

Пусть задано уравнение кривой второго порядка на плоскости

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

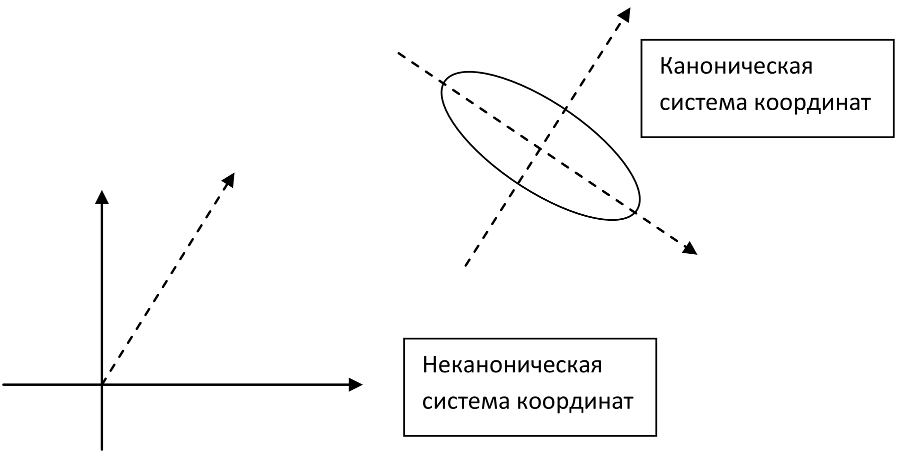
Справедливы следующие утверждения:

если $AC - B^2 > 0$, то имеет место кривая *эллиптического* типа;

если $AC - B^2 < 0$, то имеет место кривая *гиперболического* типа;

если $AC - B^2 = 0$, то имеет место кривая *параболического* типа.

Чтобы привести общее уравнение линии второго порядка к каноническому (простейшему) виду поступают следующим образом. В случае, когда коэффициент $B \neq 0$, производят поворот координатных осей на некоторый угол так, чтобы в новых координатах соответствующий коэффициент $B = 0$. После этого в полученном уравнении применяют операцию выделения полных квадратов и определяют величину парал-



лельного сдвига координатных осей.

Пример. Упростить уравнение кривой $4y^2 + 8y - 2x - 1 = 0$ и установить ее вид.

Здесь $A = 0$, $B = 0$, $C = 4$ и $AC - B^2 = 0$. Следовательно, это кривая параболического типа. Так как здесь коэффициент $B = 0$, то проводить поворот координатных осей не нужно. Запишем заданное уравнение кривой в виде $x = 2y^2 + 4y - \dfrac{1}{2}$, или $x + \dfrac{5}{2} = 2(y+10)^2$. Теперь перейдем к новым координатам по формулам $x_1 = x + \dfrac{5}{2}$, $y_1 = y + 1$. В новых координатах получаем каноническое уравнение параболы $x_1 = 2y_1^2$. В старых координатах уравнение изображает параболу с вершиной в точке $\left(-\dfrac{5}{2}; -1\right)$.

3.6. Контрольные вопросы

1. Изобразите на чертеже эллипс, гиперболу, параболу.

2. Какие из формул $\frac{c}{a}, \frac{a}{e}$ определяют эксцентриситет?

3. Может ли эксцентриситет эллипса быть равен 0? А гиперболы? Параболы?

4. У какой кривой второго порядка эксцентриситет больше 1?

5. Какие из формул $\sqrt{c^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - c^2}$ определяют малую полуось эллипса?

6. Какое из уравнений $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ определяет сопряженную гиперболу?

7. Куда направлены ветви параболы $y^2 = -3x$?

8. Пусть уравнение параболы $x^2 = -5y$. Чему равно расстояние от ее директрисы до фокуса?

9. К какому типу кривой второго порядка относится линия, задаваемая уравнением $2x^2 + xy + 3y_2 + 2x + y + 12 = 0$?

10. Надо ли для приведения уравнения кривой второго порядка $2x_2 + 3y^2 + 2x + y + 1 = 0$ к каноническому виду проводить поворот координатных осей?

3.6. Расчетное задание

1. Найти центр C и радиус R окружности $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$.

2. Установить, какую линию определяет следующее уравнение: $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$. Изобразить эту линию на чертеже.

3. Установить, какую линию определяет следующее уравнение: $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$. Изобразить эту линию на чертеже.

4. Составить уравнение окружности в полярных координатах по данному радиусу R и полярным координатам центра окружности $C\left(R; -\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Окружность задана уравнением в полярных координатах: $\rho = -4\sin\theta$. Составить уравнение окружности в декартовых прямоугольных координатах, при условии, что полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox, а полюс – с началом координат.

6. Окружность задана уравнением в декартовых прямоугольных координатах: $x^2 + y^2 = x + y$. Составить уравнение окружности в полярных координатах при условии, что полярная ось совпадает с положительной

полуосью Ox, а полюс – с началом координат.

7. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13.

8. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между его директрисами равно $\frac{32}{3}$, а эксцентриситет $e=\frac{3}{4}$.

9. Дан эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

10. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точка $M_1(-\sqrt{5}; 2)$ эллипса и расстояние между его директрисами, равное 10.

11. Установить, какую линию определяет следующее уравнение: $x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$. Изобразить эту линию на чертеже.

12. Установить, какую линию определяет следующее уравнение: $y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$. Изобразить эту линию на чертеже.

13. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что уравнения асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$, а расстояние между директрисами равно $\frac{64}{5}$.

14. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксцентриситет $e=\frac{7}{5}$.

15. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти ее полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис, уравнения асимптот.

16. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точка $M_1(-3; \frac{5}{2})$ гиперболы и уравнения директрис $x=\pm\frac{4}{3}$.

17. Установить, какую линию определяет следующее уравнение: $x=5-\frac{3}{4}\sqrt{-12+4y+y^2}$. Изобразить эту линию на чертеже.

18. Установить, какую линию определяет следующее уравнение: $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{13 + 6x + x^2}$. Изобразить эту линию на чертеже.

19. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку D (4; -8).

20. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 20x$, если абсцисса точки M равна 7.

21. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если ордината точки M равна 6.

22. На параболе $y^2 = 4{,}5x$ взята точка $M(x, y)$, находящаяся от директрисы на расстоянии $d = 9{,}125$. Вычислить расстояние этой точки от вершины параболы.

23. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 20.

24. Установить, какую линию определяет следующее уравнение: $y = -5 + \sqrt{-3x - 21}$. Изобразить эту линию на чертеже.

25. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус F (7; 2) и директриса $x - 5 = 0$.

3.8. Решение типовых задач

Задача 1. Найти центр C и радиус R кривой $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$.

Решение. Соберем вместе члены с одинаковыми координатами:
$(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 5 = 0$.
Теперь в скобках выделим полные квадраты:
$(x^2 + 4x + 4 - 4) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + 3 = 0$, или $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$.
Данная кривая – окружность с центром $C(-2; 1)$ и радиусом $R = \sqrt{2}$.

Задача 2. Окружность задана уравнением в декартовых прямоугольных координатах: $x^2 + y^2 = -y$. Составить уравнение окружности в полярных координатах при условии, что полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox, а полюс – с началом координат.

Решение. Воспользуемся формулами перехода от полярных координат $(\rho; \theta)$ к декартовым координатам $(x; y)$: $x = \rho \cos \theta$; $y = \rho \sin \theta$. После подстановки в уравнение окружности получим

$$\rho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = - \rho \sin \theta, \text{ или } \rho = - \sin \theta.$$

Задача 3. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4; 0)$, если его фокусное расстояние равно 6.

Решение. Запишем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Так как точка $M(4;\ 0)$ располагается на эллипсе, то должно выполняться равенство $\frac{16}{a^2}=1.$

Отсюда находим $a^2 = 16$. Из условия задачи следует, что половина фокусного расстояния эллипса $c = 3$. По формуле $b^2 = a^2 - c^2$ находим

$b^2 = 16 - 9 = 7.$

Теперь записываем искомое каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1.$$

Задача 4. Установить, какую линию определяет следующее уравнение:

$$x=-1+\frac{1}{3}\sqrt{3+2y-y^2}.$$

Решение. Запишем уравнение линии в следующем виде:

$$x+1=\frac{1}{3}\sqrt{3+2y-y^2}.$$

Так как правая часть равенства неотрицательна, то должно выполняться неравенство

$x + 1 \geq 0$, т.е $x \geq -1$.

После возведения в квадрат обеих частей равенства получим:

$9(x + 1)^2 = 3+2y - y^2$.

После выделения полного квадрата в правой части равенства имеем:

$9(x + 1)^2 = -(y - 1)^2 + 4$.

Последнее равенство запишем так:

$9(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Его преобразуем к виду:

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{4}{9}}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

Следовательно, заданная линия есть часть эллипса с центром в точке $C(-1;\ 1)$, полуосями $a = \frac{2}{3}$, $b = 2$, представленная точками с абсциссами $x \geq -1$.

Задача 5. Составить уравнение параболы, вершина которой расположена в начале координатной системы, зная, что парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C(1;\ 2)$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Решение. Так как точка $C(1;\ 2)$ находится на параболе, то ветви параболы направлены вдоль оси Oy. Тогда ее каноническое уравнение имеет вид: $x^2 = 2py$. Координаты точки С должны удовлетворять этому уравнению. Поэтому имеем $1 = 4p$. Тогда параметр параболы $p = \frac{1}{4}$ и искомое уравнение параболы запишем так: $x^2 = \frac{1}{2}y$.

Для рассматриваемой параболы уравнение директрисы записывается в виде $y = -\frac{1}{2}p$, а фокусу соответствует точка $F\left(0; \frac{1}{2}p\right)$. Следовательно, $y = -\frac{1}{8}$ — искомое уравнение директрисы, а ее фокус $F\left(0; \frac{1}{8}\right)$.

Список литературы

1. *Дмитрий Письменный*, Конспект лекций по высшей математике 1 часть, М.: Айрис пресс, 2004 (или другие издания).
2. *Д. В. Беклемишев*, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М.: Высшая школа, 1998.
3. *В. С. Щипачев*, Высшая математика, М.: Высшая школа, 1998.
4. *П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова*, Высшая математика в упражнениях и задачах, часть I, М.: Высшая школа, 1997.
5. *Д. В. Клетеник*, Сборник задач по аналитической геометрии, С.-П..: Профессия, 2005.
6. *Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поркшеян*, Практикум по высшей математике, Ростов-на-Дону: Феникс, 2004.
7. *М. Я. Выгодский*, Справочник по высшей математике, М:, 1961 (или другие издания).

Содержание