Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии икартографии

В.И. КРЫЛОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ
(часть первая: невозмущённое движение)

Рекомендовано учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области геодезии и фотограмметрии в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 – Геодезия и дистанционное зондирование с присвоением квалификации (степени) бакалавр и 21.05.01 – Прикладная геодезия с присвоением квалификации инженер-геодезист

Москва
2015

Рецензенты:

Институт астрономии Российской академии наук
(старший научный сотрудник, канд. техн. наук **А.А. Клюйков);**

профессор, канд. техн. наук **О.В. Половнёв**
(МИИГАиК)

Крылов В.И.

Основы теории движения ИСЗ (часть первая: невозмущённое движение): учебное пособие . – М.: МИИГАиК, 2015. – 52 с.: ил.

Учебное пособие составлено в соответствии с программами курсов «Теория движения ИСЗ» и «Космическая геодезия и геодинамика», рекомендовано кафедрой астрономии и космической геодезии, утверждено к изданию методической комиссией геодезического факультета МИИГАиК. Рассматриваются вопросы невозмущённого движения ИСЗ.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Геодезия и дистанционное зондирование» и по специальности «Прикладная геодезия».

Электронная версия учебного пособия размещена на сайте библиотеки МИИГАиК http://library.miigaik.ru.

1. УРАВНЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО И ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

1.1. Законы Кеплера

Невозмущённое движение спутников называют ещё Кеплеровым движением, так как оно подчиняется трём законам, открытым в 1609–1618 гг. немецким астрономом Иоганном Кеплером. Эти три закона были открыты Кеплером на основе анализа результатов обработки наблюдений Марса, выполненных датским астрономом Тихо Браге. Применительно к движению планет Солнечной системы законы Кеплера можно сформулировать следующим образом:

Первый закон. Каждая планета Солнечной системы движется по эллипсу вокруг Солнца, находящегося в одном из его фокусов.

Второй закон. Площадь, заметаемая гелиоцентрическим радиус-вектором планеты, пропорциональна времени.

Третий закон. Отношение квадратов периодов обращения планет вокруг Солнца пропорционально отношению кубов их больших полуосей.

Эти знаменитые законы Кеплера можно вывести из интегрирования дифференциальных уравнений движения небесных тел. Более того, великому английскому учёному Исааку Ньютону этим методом удалось уточнить третий закон Кеплера.

1.2. Законы Ньютона

Вывод дифференциальных уравнений движения ИСЗ основан на трёх законах Ньютона и законе всемирного тяготения Ньютона, заложивших основы динамики. Три закона Ньютона можно сформулировать следующим образом.

Первый закон. Каждое тело остаётся в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока оно не будет выведено из этого состояния под действием силы, приложенной извне.

Второй закон. Скорость изменения импульса тела пропорциональна приложенной силе и направлена вдоль линии действия силы.

Третий закон. Каждому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Пусть

$$\vec{r}, \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

обозначают вектор положения, вектор скорости и вектор ускорения тела массы *m*. Тогда импульс (или количество движения) тела равен $m\dot{\vec{r}}$, а его кинетический момент равен $m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$. В векторных обозначениях соотношение $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ объединяет первый и второй законы Ньютона [6].

Ньютонов закон всемирного тяготения формулируется следующим образом: каждая частица вещества во Вселенной притягивает каждую другую частицу вещества с силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Закон всемирного тяготения выражается формулой

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2},$$

где *G* – гравитационная постоянная (гравитационная постоянная впервые определена Г. Кавендишем в 1798 г.), численное значение которой в настоящее время принято равным $G = (6{,}6720 \pm 0{,}0041) \cdot 10^{-11}$ м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$.

1.3. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ

При выводе дифференциальных уравнений движения ИСЗ будем считать Землю и спутник в виде материальных точек с соответствующими массами, которые движутся друг относительно друга лишь под действием сил взаимного притяжения. Такое движение называется невозмущённым.

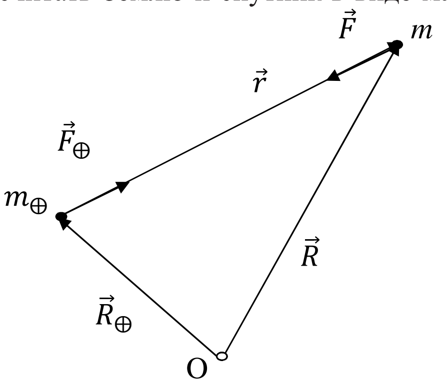

Рис. 1.1. Векторы, определяющие положение двух тел

На рис. 1.1 положение спутника относительно Земли обозначено вектором $\vec{r}$. Сила притяжения $\vec{F}_\oplus$, действующая со стороны ИСЗ на Землю, масса которой $m_\oplus$, направлена вдоль вектора $\vec{r}$ в сторону спутника, масса которого *m*. В то же время сила $\vec{F}$, приложенная к спутнику, действует в противоположном направлении.

На основании третьего закона Ньютона ($\vec{F}_{\oplus} = -\vec{F}$) и закона всемирного тяготения можно записать выражения для сил, действующих на Землю и на спутник [6],

$$\vec{F}_{\oplus} = -\vec{F} = G\frac{m_{\oplus}m}{r^3}\vec{r}.$$

Будем рассматривать движение Земли и спутника в невращающейся прямоугольной системе координат, начало которой совместим с некоторой произвольной фиксированной точкой *O*. В этой системе координат положения Земли и спутника будут задаваться векторами $\vec{R}_{\oplus}$ и $\vec{R}$, направленными из точки *O* к телам с массами $m_{\oplus}$ и m соответственно (см. рис. 1.1). Невращающаяся система координат, связанная с неподвижной точкой *O*, инерциальная, и значит, в этой системе координат будет справедлив второй закон Ньютона. Тогда, на основании этого закона и закона всемирного тяготения, уравнения движения Земли и спутника относительно точки *O* под действием сил взаимного притяжения принимают вид

$$\begin{gathered} m_{\oplus}\ddot{\vec{R}}_{\oplus} = G\frac{m_{\oplus}m}{r^3}\vec{r}; \\ m\ddot{\vec{R}} = -G\frac{m_{\oplus}m}{r^3}\vec{r}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Необходимо отметить, что массы в левых и правых частях равенств (1.1) выражают различные свойства тел. Массы в левых частях характеризуют инерционные свойства тел и называются инертными массами. Массы в правых частях характеризуют способность тел притягивать другие тела и притягиваться ими и называются тяжёлыми или гравитационными массами. Существует, однако, фундаментальный закон природы (закон эквивалентности), в соответствии с которым инертная и тяжёлая массы пропорциональны друг другу. При надлежащем выборе единиц измерения эти массы будут просто тождественны. Эквивалентность инертной и тяжёлой масс проверял ещё сам И. Ньютон, измеряя периоды колебаний математического маятника. С помощью крутильных весов Л. Этвёш доказал справедливость принципа эквивалентности с точностью до 10^{-8}; Р. Дикке довёл точность до 10^{-10}; В.Б. Брагин-

ский – до 10^{-12}. Вот почему для масс в левых и правых частях уравнений (1.1) использованы одни и те же обозначения.
Сложим почленно уравнения, входящие в систему (1.1), и после двукратного интегрирования получим

$$m_\oplus \vec{R}_\oplus + m\vec{R} = \vec{a}t + \vec{b},$$

где $\vec{a}, \vec{b}$ – произвольные постоянные интегрирования, записанные в виде векторов.

Введём радиус–вектор центра масс системы Земля–спутник, который выражается формулой

$$\vec{R}_{c.g.} = \frac{m_\oplus \vec{R}_\oplus + m\vec{R}}{m_\oplus + m}. \tag{1.2}$$

Тогда можно записать

$$\vec{R}_{c.g.} = \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{m_\oplus + m}; \quad \dot{\vec{R}}_{c.g.} = \frac{\vec{a}}{m_\oplus + m}. \tag{1.3}$$

Из уравнений (1.3) следует, что центр масс системы Земля–спутник движется прямолинейно и равномерно. Это означает, что система координат с началом в барицентре системы Земля–спутник будет инерциальной.

Покажем, что система координат с началом, расположенным в центре масс Земли, тоже можно принять за инерциальную систему координат. Из уравнения (1.2) следует, что

$$m_\oplus \vec{R}_\oplus + m\vec{R} - \left(m_\oplus + m\right)\vec{R}_{c.g.} = 0. \tag{1.4}$$

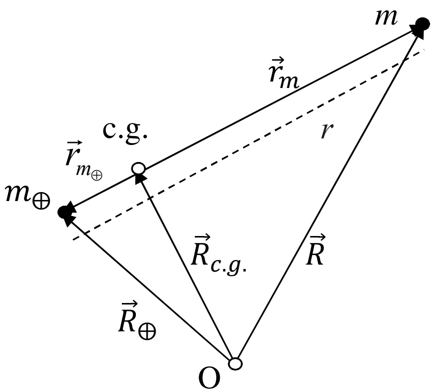

Рис. 1.2. Векторы, определяющие положение двух тел и их центра масс

Так как сумма коэффициентов в уравнении (1.4) равна нулю, то точки, обозначающие Землю, спутник и их центр масс (рис. 1.2), лежат на одной прямой. Учитывая, что $r_{m_\oplus} = \vec{R}_\oplus - \vec{R}_{c.g.}$ и $\vec{r}_m = \vec{R} - \vec{R}_{c.g.}$, вместо уравнения (1.4) можно записать

$$m_\oplus \vec{r}_{m_\oplus} + m\vec{r}_m = 0.$$

Так как векторы $\vec{r}_{m_\oplus}, \vec{r}_m$, исходящие из одной точки *c.g.*, противоположно направлены, то можно записать

$$m_{\oplus} r_{m_{\oplus}} = m r_m .$$

Или

$$r_m = \frac{m_{\oplus}}{m} r_{m_{\oplus}} = \frac{m_{\oplus}}{m}\left(r - r_m\right) = \frac{m_{\oplus}}{m_{\oplus} + m} r \cong r.$$

где r – расстояние между точками $m_{\oplus}$ и m.

Это значит, что центр масс Земли практически совпадает с центром масс системы Земля–ИСЗ.

Вычитая первое уравнение из второго системы (1.1) и учитывая, что $\vec{R} - \vec{R}_{\oplus} = \vec{r}$, получим дифференциальные уравнения движения спутника относительно Земли в векторной форме

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{1.5}$$

где $\mu = G m_{\oplus} \cong G\left(m_{\oplus} + m\right)$.

Величина μ называется геоцентрической гравитационной постоянной, численное значение которой принимается равным $\mu = 3{,}9860044 \cdot 10^{14}$ м^{3}с$^{-2}$.

Можно ввести потенциальную функцию $V_0 = \dfrac{\mu}{r}$, которую называют также потенциалом притяжения материальной точки, хотя с физической точки зрения потенциал отличается от потенциальной функции знаком. Тогда дифференциальные уравнения движения ИСЗ можно записать в виде

$$\ddot{\vec{r}} = \operatorname{grad} V_0, \tag{1.6}$$

где оператор $\operatorname{grad} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – градиент; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты.

Масса спутника пренебрежимо мала по сравнению с массой Земли, поэтому барицентр системы Земля–ИСЗ, как было показано выше, практически совпадает с центром масс Земли и, следовательно, геоцентрическую равноденственную систему координат, отнесённую к определённой эпохе, например, к эпохе *J2000.0*, можно считать инерциальной. В координатной форме уравнения движения ИСЗ в равноденственной системе координат выглядят так:

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3};$$

$$\ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3}; \qquad (1.7)$$

$$\ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3}.$$

Введём функцию $U = \frac{\mu m}{r}$, которую называют силовой функцией в силу того, что частные производные от неё по координатам равны проекциям силы на соответствующие оси координат. Заметим также, что силовая функция, взятая с обратным знаком, численно равна потенциальной энергии. Тогда уравнения движения (1.7) можно записать в виде

$$m\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x};$$

$$m\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}; \qquad (1.8)$$

$$m\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Если ввести кинетическую энергию, обозначенную символом T, и которая вычисляется по формуле

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right), \qquad (1.9)$$

то левые части уравнений движения в (1.8) можно записать в виде

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right);$$

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right); \qquad (1.10)$$

$$m\ddot{z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right).$$

И тогда уравнения движения можно представить следующим образом

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial U}{\partial x};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=\frac{\partial U}{\partial y}; \qquad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right)=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Вводя теперь лагранжиан или функцию Лагранжа, представляющую собой разность кинетической и потенциальной энергий $L = T - (-U)$, и имея в виду, что потенциальная энергия $-U$ не зависит от составляющих скорости ИСЗ, а кинетическая энергия T не зависит от координат ИСЗ, уравнения движения (1.11) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=\frac{\partial L}{\partial y}; \qquad (1.12)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)=\frac{\partial L}{\partial z}.$$

1.4. Ковариантная форма записи уравнений движения

Форма записи дифференциальных уравнений движения называется ковариантной, если она не зависит от вида используемых систем координат. Для вывода ковариантной формы записи дифференциальных уравнений движения выразим прямоугольные координаты спутника x, y, z в виде функций от n произвольных координат q (например, полярных, цилиндрических или каких-нибудь других координат) и времени t $x=x\left(q_1,q_2,...,q_n,t\right),\left(x\to y,z\right)$. Эти произвольные координаты называются по предложению Лагранжа обобщёнными координатами, а их производные по времени – обобщёнными скоростями.

Тогда имеет место соотношение

$$\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad \left(x\to y,z\right).$$

Для любого q (например, для q_k) получаем

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{q}_k}=\frac{\partial x}{\partial q_k}.$$

Покажем, что форма записи дифференциальных уравнений движения (1.12) не изменится при использовании вместо прямоугольных любых других координат. Для этого дифференцируем выражение для кинетической энергии (1.9) частным образом по обобщённым координатам и обобщённым скоростям

$$\frac{\partial T}{\partial q_k}=m\left(\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial q_k}+\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial q_k}+\dot{z}\frac{\partial\dot{z}}{\partial q_k}\right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}=m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_k}+\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_k}+\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right).$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)=m\left[\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_k}+\ddot{x}\frac{\partial y}{\partial q_k}+\ddot{x}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k}+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial q_k}+$$

$$+m\left(\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial q_k}+\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial q_k}+\dot{z}\frac{\partial\dot{z}}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial U}{\partial q_k}+\frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Вводя опять функцию Лагранжа $L=T+U$ и имея в виду, что потенциальная энергия U не зависит от обобщённых скоростей $\dot{q}_k$, уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_k};\quad k=1,2,...,n. \tag{1.13}$$

Ковариантная форма записи уравнений движения (1.13) называется также уравнениями Лагранжа второго рода или уравнениями Эйлера–Лагранжа. Имея в виду, что частная производная от функции Лагранжа по обобщённым координатам представляет собой обобщённую силу, а частная производная от функции Лагранжа по обобщённым скоростям – обобщённый импульс, то уравнения (1.13) есть не что иное, как математическое выражение в общем виде второго закона Ньютона.

1.5. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ в Гринвичской прямоугольной системе координат

Иногда бывает удобно использовать дифференциальные уравнения движения ИСЗ, выписанные в системе координат, жёстко связанной с Землёй, или по-другому – в Гринвичской системе координат. Выведем эти дифференциальные уравнения движения, опираясь на ковариантную форму их записи.

Используя связь между гринвичскими *X, Y, Z* и равноденственными *x, y, z* координатами, определяемую формулами

$$x = X\cos S - Y\sin S;$$

$$y = X\sin S + Y\cos S;$$

$$z = Z,$$

преобразуем функцию Лагранжа $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{\mu m}{r}$ из равноденственной системы координат к Гринвичской системе координат:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + X^2\omega^2 + Y^2\omega^2 - 2\dot{X}Y\omega + 2X\dot{Y}\omega\right) + \frac{\mu m}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

В этих формулах *S* – Гринвичское звёздное время; ω – угловая скорость вращения Земли.

Используя теперь ковариантную форму записи уравнений (1.13), положив в них $q_1 \to X$, $q_2 \to Y$, $q_3 \to Z$, $\dot{q}_1 \to \dot{X}$, $\dot{q}_2 \to \dot{Y}$, $\dot{q}_3 \to \dot{Z}$ и сформировав соответствующие производные, получим дифференциальные уравнения движения ИСЗ в Гринвичской системе координат

$$\begin{aligned} &\ddot{X} - 2\omega\dot{Y} = -\frac{\mu X}{r^3} + \omega^2 X; \\ &\ddot{Y} - 2\omega\dot{X} = -\frac{\mu Y}{r^3} + \omega^2 Y; \\ &\ddot{Z} = -\frac{\mu Z}{r^3}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

2. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

Уравнения невозмущённого движения ИСЗ (1.7) представляют собой систему трёх дифференциальных уравнений второго порядка. Решение этой системы должно дать шесть интегралов и шесть произвольных постоянных. Эти шесть интегралов, называемые в небесной механике первыми интегралами, представляют собой функции координат и скоростей, не изменяющиеся в процессе движения [2].

2.1. Интегралы площадей

Умножив левую и правую части уравнения движения, записанного в векторной форме $\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$ слева векторно на $\vec{r}$, получим новое дифференциальное уравнение

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0.$$

Преобразованное уравнение сразу же интегрируется. В результате получим

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \tag{2.1}$$

Компонентами вектора $\vec{c}$ являются произвольные постоянные интегрирования. Заметим, что уравнение (2.1) выражает постоянство кинетического момента. Запишем векторное произведение левой части уравнения (2.1) в виде определителя, а правую часть представим в координатной форме

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \vec{i}c_1 + \vec{j}c_2 + \vec{k}c_3. \tag{2.2}$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки и сравнивая коэффициенты перед одинаковыми ортами, получим выражения для постоянных интегрирования

$$c_1 = y\dot{z} - \dot{y}z;$$

$$c_2 = \dot{x}z - x\dot{z}; \qquad (2.3)$$

$$c_3 = x\dot{y} - \dot{x}y.$$

Умножая теперь первое уравнение (2.3) на x , второе – на y, третье – на z, и суммируя результаты, получим уравнение

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0, \qquad (2.4)$$

представляющее собой уравнение плоскости, проходящей через начало координат. Это означает, что невозмущённая орбита ИСЗ лежит в плоскости, проходящей через центр масс Земли. Уравнение (2.4) можно записать и в векторной форме $\vec{c} \cdot \vec{r} = 0,$ из которого следует, что плоскость орбиты перпендикулярна вектору $\vec{c}$. Так как невозмущённая орбита является плоской кривой, то иногда бывает удобно использовать геоцентрическую орбитальную систему координат $x_\Omega y_\Omega\, z_\Omega$ (рис. 2.1). Ось абсцисс этой системы координат направлена по линии узлов (линия пересечения плоскости орбиты с плоскостью экватора). Ось аппликат направлена по нормали к плоскости орбиты, а ось ординат дополняет систему до правой тройки векторов.

Уравнения движения в геоцентрической орбитальной системе координат имеют вид

$$\ddot{x}_\Omega = -\mu \frac{x_\Omega}{r^3};$$

$$\ddot{y}_\Omega = -\mu \frac{y_\Omega}{r^3}; \qquad (2.5)$$

$$\ddot{z}_\Omega = 0.$$

Тогда вместо (2.2) будем иметь

$$\begin{vmatrix} \vec{i}_\Omega & \vec{j}_\Omega & \vec{k}_\Omega \\ x_\Omega & y_\Omega & 0 \\ \dot{x}_\Omega & \dot{y}_\Omega & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}_\Omega c$$

и вместо трёх интегралов (2.3) получим один интеграл

$$x_\Omega \dot{y}_\Omega - \dot{x}_\Omega y_\Omega = c. \qquad (2.6)$$

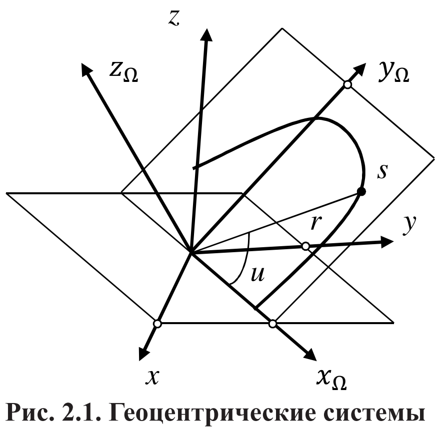

Рис. 2.1. Геоцентрические системы координат: равноденственная *xyz* и орбитальная $x_\Omega y_\Omega z_\Omega$

Выразим прямоугольные координаты x_Ω, y_Ω через полярные координаты r, u, используя формулы

$$x_\Omega = r\cos u;$$

$$y_\Omega = r\sin u.$$

Тогда составляющие скорости можно записать в виде

$$\dot{x}_\Omega = \dot{r}\cos u - r\sin u\dot{u};$$

$$\dot{y}_\Omega = \dot{r}\sin u + r\cos u\dot{u}.$$

Подставляя теперь эти выражения в уравнение (2.6), получим выражение для постоянной интегрирования c

$$r^2\dot{u} = c. \tag{2.7}$$

Левая часть (2.7) представляет собой удвоенную секториальную скорость. Секториальной скоростью называется площадь, заметаемая радиус-вектором в единицу времени. Таким образом, можно заключить, что в процессе невозмущённого движения секториальная скорость остаётся неизменной величиной и уравнение (2.7) представляет собой математическое выражение второго закона Кеплера, в соответствии с которым радиус–вектор за одинаковые промежутки времени заметает одинаковые площади. В связи с этим интегралы (2.3) и называются интегралами площадей.

2.2. Интеграл энергии

Умножим уравнение движения $\ddot{\vec{r}} = -\mu\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ скалярно на $2\dot{\vec{r}}$. Тогда получим

$$2\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}} = -2\mu\frac{\dot{\vec{r}}\,\vec{r}}{r^3}. \tag{2.8}$$

Учитывая, что

$$2\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}} = \frac{d\left(v^2\right)}{dt}.$$

и

$$-2\mu\frac{\dot{\vec{r}}\,\vec{r}}{r^3} = 2\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$

произведём замены в левой и правой частях уравнения (2.8) и после интегрирования найдём

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \tag{2.9}$$

Здесь v – орбитальная скорость, h – новая произвольная постоянная, называемая постоянной энергии.

Найденный интеграл представляет собой закон сохранения энергии в системе Земля–ИСЗ, поэтому его и называют интегралом энергии.

2.3. Интегралы Лапласа

Если найти такую функцию, вторая производная по времени от которой по форме имела бы такой же вид, что и вторая производная по времени от радиус–вектора в уравнении невозмущённого движения ИСЗ $\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$, то система проинтегрируется методом разделения переменных. Оказывается, что такой функцией является функция D, имеющая вид

$$D = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}. \tag{2.10}$$

Выпишем первую и вторую производные по времени от функции D:

$$\dot{D} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{r} + h; \tag{2.11}$$

$$\ddot{D} = -\mu \frac{\vec{r}\,\dot{\vec{r}}}{r^3} = -\mu \frac{D}{r^3}. \tag{2.12}$$

Сравнивая уравнение (2.12) с уравнением невозмущённого движения, можно записать новое дифференциальное уравнение в виде

$$\ddot{D}\vec{r} - D\ddot{\vec{r}} = 0, \tag{2.13}$$

интегрируя которое получим

$$\dot{D} \cdot \vec{r} - D\dot{\vec{r}} = \vec{f}, \tag{2.14}$$

где компоненты вектора $\vec{f}$ – произвольные постоянные интегрирования, которые называются постоянными Лапласа.

Уравнение (2.14) можно представить в координатной форме

$$\dot{D}x - D\dot{x} = f_1;$$

$$\dot{D}y - D\dot{y} = f_2; \tag{2.15}$$

$$\dot{D}z - D\dot{z} = f_3.$$

Эти уравнения называются интегралами Лапласа.

Итак, в результате интегрирования уравнений невозмущённого движения найдены семь первых интегралов – три интеграла площадей, интеграл энергии, три интеграла Лапласа, т.е. как будто даже больше, чем надо, поскольку общий интеграл системы должен состоять из шести независимых интегралов. Однако найденные семь интегралов не могут составить общего интеграла системы, так как ни один из этих интегралов не содержит времени, и эти семь интегралов не являются независимыми.

Найдём два тождественных соотношения, существующих между этими интегралами.

Для этого интегралы площадей

$$y\dot{z} - \dot{y}z = c_1;$$

$$\dot{x}z - x\dot{z} = c_2;$$

$$x\dot{y} - \dot{x}y = c_3$$

умножим на интегралы Лапласа

$$\dot{D}x - D\dot{x} = f_1;$$

$$\dot{D}y - D\dot{y} = f_2;$$

$$\dot{D}z - D\dot{z} = f_3$$

и результаты просуммируем.

Тогда получим

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.16) можно записать в векторной форме

$$\vec{c} \cdot \vec{f} = 0. \tag{2.17}$$

Поскольку вектор площадей перпендикулярен плоскости орбиты, из найденного выражения (2.17) следует, что вектор Лапласа лежит в плоскости орбиты.

Для вывода второго соотношения возведём в квадрат интегралы площадей и интегралы Лапласа. В результате получим

$$c^2 = r^4 \dot{u}^2 = r^2 \left(v^2 - \dot{r}^2 \right) = r^2 \left(\frac{2\mu}{r} + h \right) - r^2 \dot{r}^2 =$$

$$= r^2 \left(\frac{2\mu}{r} + h \right) - D^2;$$

$$f^2 = \dot{D}^2 \vec{r}^{\,2} + D^2 \dot{\vec{r}}^{\,2} - 2D\dot{D}\vec{r}\,\dot{\vec{r}} =$$

$$= r^2 \left(\frac{\mu}{r} + h \right)^2 - D^2 \left(2\dot{D} - v^2 \right) = r^2 \left(\frac{\mu}{r} + h \right)^2 - D^2 h.$$

Или

$$hc^2 = hr^2 \left(\frac{2\mu}{r} + h \right) - D^2 h;$$

$$f^2 = r^2 \left(\frac{2\mu}{r} + h \right)^2 - D^2 h.$$

Отсюда следует второе соотношение между постоянными интегрирования

$$f^2 = \mu^2 + hc^2. \tag{2.18}$$

2.4. Интеграл орбиты

Интеграл орбиты удобно выводить, записав уравнения движения в ковариантной форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}.$$

Так как невозмущённое движение представляет собой плоскую кривую, то в качестве обобщённых координат удобно использовать полярные координаты

$$q_1 = r; \quad q_2 = u.$$

Записав квадрат орбитальной скорости в полярной системе координат

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2,$$

функция Лагранжа примет вид

$$L=\frac{m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{u}^2\right)}{2}+\frac{\mu m}{r}.$$

Взяв производные от функции Лагранжа, входящие в левые и правые части уравнений Лагранжа второго рода,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=m\ddot{r};$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=m\left(r\dot{u}^2-\frac{\mu}{r^2}\right); \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}}=mr^2\dot{u}; \quad \frac{\partial L}{\partial u}=0,$$

уравнения движения запишутся в виде системы, состоящей из двух уравнений

$$\begin{gathered}\ddot{r}-r\dot{u}^2=-\frac{\mu}{r^2};\\ \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{u}\right)=0.\end{gathered} \tag{2.19}$$

Второе уравнение системы (2.19) интегрируется сразу и даёт уже известный нам интеграл площадей $r^2\dot{u}=c$.

Для удобства интегрирования первого уравнения системы (2.19) воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции и сделаем подстановку Бине $v=\frac{1}{r}$ [8]. Тогда первую и вторую производные по времени от r можно представить в виде

$$\dot{r}=\frac{dr}{du}\frac{du}{dt}=\frac{c}{r^2}\frac{dr}{du}=-c\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{du}=-c\frac{dv}{du};$$

$$\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{du}\frac{du}{dt}=\frac{c}{r^2}\frac{d\dot{r}}{du}=-\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2v}{du^2}=-c^2v^2\frac{d^2v}{du^2}.$$

В результате таких преобразований первое уравнение в системе (2.19) упрощается и принимает вид

$$\frac{d^2v}{du^2}+v=\frac{\mu}{c^2} \tag{2.20}$$

и легко интегрируется. В результате интегрирования уравнения (2.20) и обратного перехода к r получим

$$r=\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1+e\cos(u-\omega)}, \qquad (2.21)$$

где e и ω – новые произвольные постоянные интегрирования.

Полученный интеграл называется интегралом орбиты. Уравнение (2.21) представляет собой уравнение конического сечения. Напомним, что коническим сечением называется линия пересечения боковой поверхности кругового конуса с секущей плоскостью. В зависимости от угла между плоскостью основания конуса и секущей плоскостью, не проходящей через вершину конуса, коническое сечение может быть окружностью, эллипсом, параболой или гиперболой (рис. 2.2). Если секущая плоскость пересекает все образующие конуса, то получается эллипс (если к тому же секущая плоскость параллельна основанию конуса, то получается окружность), если секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса, то получается парабола, если же секущая плоскость параллельна каким-нибудь двум образующим конуса, то получается гипербола.

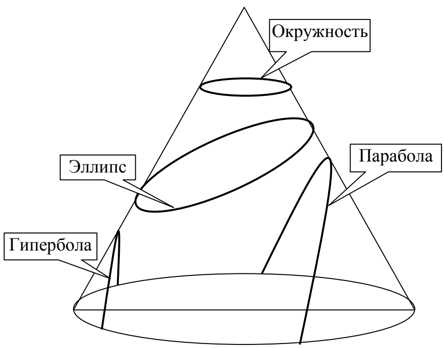

Рис. 2.2. Конические сечения

Это означает, что орбита может быть окружностью, эллипсом, параболой или гиперболой. Следовательно, уравнение (2.21) является обобщённым математическим выражением первого закона Кеплера.

3. ПАРАМЕТРЫ ОРБИТЫ

3.1. Геометрия движения ИСЗ по эллиптической орбите

Напомним, что коническим сечением называется кривая, по которой пересекает круговой конус произвольная плоскость, не проходящая через его вершину. Каждое коническое сечение, кроме окружности, представляет собой геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний которых от некоторой точки F (фокус) и некоторой прямой d (директриса, которая представляет собой линию пересечения секущей плоскости и плоскости основания кругового конуса) постоянно и равно e (эксцентриситет) (рис. 3.1) [9].

В этом фокусе находится центр масс притягивающего тела. Второй фокус F' эллипса будем называть свободным. Ближайшая к фокусу F точка эллипса П называется перигеем (или перицентром в общем случае), а наиболее удалённая от этого фокуса точка эллипса А называется апогеем (апоцентром). Прямая, проходящая через перицентр и апоцентр, называется линией апсид. Расстояние от фокуса до перицентра называется перигейным расстоянием q, а от фокуса до апоцентра – апогейным расстоянием Q. Длина перпендикуляра к линии апсид от фокуса до точки эллипса называется фокальным параметром p. Угол с вершиной в фокусе между направлениями на перицентр и на точку s

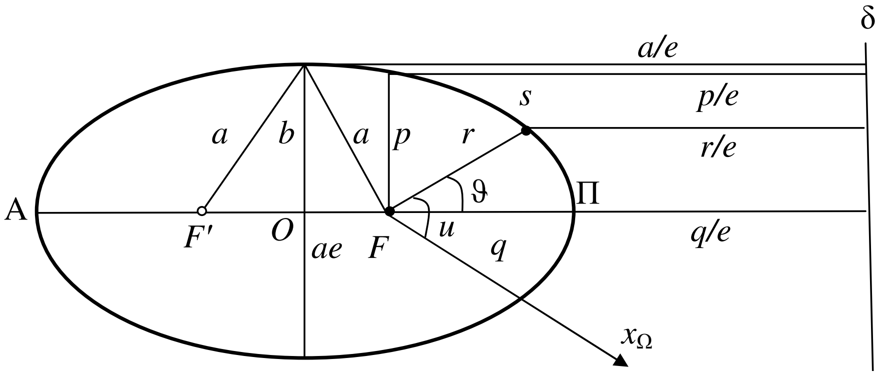

Рис. 3.1. Геометрия движения по эллипсу

(спутник) эллипса называется истинной аномалией ϑ. Угол с вершиной в фокусе между направлением на восходящий узел и на спутник называется аргументом широты u.

Непосредственно из рис. 3.1 видно, что

$$p = r(1 + e\cos\vartheta).$$

Откуда

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}. \tag{3.1}$$

При $\vartheta = 0$, $r = q$ и

$$p = q(1 + e). \tag{3.2}$$

Имея в виду второе определение эллипса (сумма расстояний от фокусов до текущей точки эллипса есть величина постоянная и равна удвоенному значению большой полуоси $2a$), можно записать:

$$a/e = a + q/e.$$

Отсюда

$$q = a(1 - e). \tag{3.3}$$

Отрезок $OF = ae$ называется линейным эксцентриситетом.

Подставив (3.3) в (3.2), получим выражение для фокального параметра

$$p = a(1 - e^2). \tag{3.4}$$

Очевидно также, что

$$b = a\sqrt{1 - e^2},$$

где b – малая полуось эллипса.

Сравнивая уравнения (3.1) и (2.21), каждое из которых представляет собой уравнение эллипса, замечаем, что

$$p = \frac{c^2}{\mu} \tag{3.5}$$

и

$$\vartheta = u - \omega. \tag{3.6}$$

Угол ω называется аргументом перицентра; это угол с вершиной в фокусе между направлением на восходящий узел (точка пересечения орбиты с плоскостью экватора) орбиты спутника и направлением на перицентр орбиты.

Из интегрирования дифференциальных уравнений движения можно вывести и третий закон Кеплера. Если $\sigma = \pi ab$ – площадь эллипса, то удвоенная секториальная скорость равна [1]:

$$c=\frac{2\pi ab}{T}, \tag{3.7}$$

где T – период обращения ИСЗ.

Так как $c=\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}$, а $b=a\sqrt{1-e^2}$, то с помощью (3.7) найдём формулу

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\mu}, \tag{3.8}$$

представляющую собой математическое выражение третьего закона Кеплера: отношение квадрата периода обращения ИСЗ к кубу большой полуоси его орбиты – величина постоянная. В (3.8) μ представляет собой произведение гравитационной постоянной на сумму масс притягивающего и притягиваемого тел. В этом и состоит уточнение Ньютона третьего закона Кеплера.

Величину $\frac{2\pi}{T}=\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}=n$ называют средним движением ИСЗ по эллиптической орбите.

3.2. Уравнение Кеплера

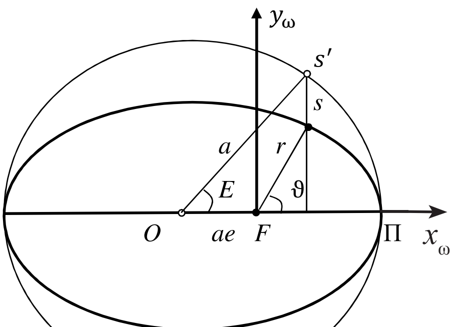

Рис. 3.2. Истинная (угол ϑ) и эксцентрическая (угол E) аномалии

Введём вспомогательный угол – эксцентрическую аномалию E (рис. 3.2). Для этого из геометрического центра эллипса опишем окружность радиусом большой полуоси. Из текущего положения спутника на орбите s опустим перпендикуляр на линию апсид и продолжим его до пересечения с окружностью, получим фиктивное положение спутника на окружности s'. Угол с вершиной в геометрическом центре эллипса между направлением в перицентр орбиты и прямой Os' и называется эксцентрической аномалией $E(0\leq E<2\pi)$.

Введём орбитальную плоскую правую прямоугольную систему координат $x_\omega y_\omega$, начало которой поместим в непустой фокус эллипса, а ось абсцисс направим в перицентр эллиптической орбиты.

Прямоугольные координаты текущих точек эллипса в этой орбитальной системе координат через полярные координаты r (модуль радиус–вектора) и ϑ (истинная аномалия) выражаются, как следует из рис. 3.2, следующим образом

$$x_\omega = r\cos\vartheta; \tag{3.9}$$

$$y_\omega = r\sin\vartheta. \tag{3.10}$$

Используя уравнение орбиты (3.1), можно написать

$$r = a\left(1-e^2\right) - ex_\omega. \tag{3.11}$$

Выразим теперь прямоугольные координаты текущих точек эллиптической орбиты через эксцентрическую аномалию. Непосредственно из рис. 3.2 видно, что выражение для абсциссы есть:

$$x_\omega = a\left(\cos E - e\right). \tag{3.12}$$

Подставив соотношение (3.12) в выражение для вычисления модуля радиус-вектора (3.11), получим

$$r = a\left(1 - e\cos E\right). \tag{3.13}$$

Используя теорему Пифагора для прямоугольного треугольника, можно найти выражение для ординаты

$$y_\omega = \sqrt{r^2 - x_\omega^2} = a\sin E\sqrt{1-e^2}. \tag{3.14}$$

Нам потребуются также скорости изменения координат, выражения для которых получим дифференцированием по времени выражений (3.12) и (3.14):

$$\begin{aligned}\dot{x}_\omega &= -a\dot{E}\sin E;\\ \dot{y}_\omega &= a\sqrt{1-e^2}\,\dot{E}\cos E.\end{aligned} \tag{3.16}$$

В интеграле площадей, записанном относительно орбитальной системы координат

$$x_\omega\dot{y}_\omega - \dot{x}_\omega y_\omega = \sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}, \tag{3.17}$$

сделаем замены с помощью (3.12), (3.14)–(3.16). Тогда (3.17) можно представить в виде

$$(1-e\cos E)\dot{E}=n. \tag{3.18}$$

Интегрируя последнее выражение, получаем уравнение Кеплера

$$E=M+e\sin E; \tag{3.19}$$

где $M = n(t-\tau)$ – средняя аномалия; τ – произвольная постоянная интегрирования, которую называют моментом прохождения через перицентр.

Уравнение Кеплера можно решить методом последовательных приближений

$$\begin{aligned} &E_0=M; \\ &E_1=M+e\sin E_0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &E_k=M+e\sin E_{k-1}; \quad k=1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Уравнение Кеплера связывает эксцентрическую и среднюю аномалии.

Выведем формулу, связывающую истинную и эксцентрическую аномалии. Приравнивая правые части выражений (3.9) и (3.12), можно записать:

$$r\cos\vartheta=a(\cos E-e). \tag{3.21}$$

Сначала вычитая, а потом, складывая почленно выражения (3.13) и (3.21), получим

$$r(1-\cos\vartheta)=a(1+e)(1-\cos E); \tag{3.22}$$

$$r(1+\cos\vartheta)=a(1-e)(1+\cos E). \tag{3.23}$$

Откуда, разделив (3.22) на (3.23), имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{3.24}$$

Полезной для случая орбит с большим эксцентриситетом, может оказаться также формула, выведенная Брукке и Чевола, которая имеет вид

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta-E}{2}=\frac{e\sin E}{1+\sqrt{1-e^2}-e\cos E}. \tag{3.25}$$

3.3. Кеплеровы элементы орбиты

В результате интегрирования дифференциальных уравнений движения на заданный момент времени t получают координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ спутника – шесть чисел, которые полностью характеризуют движущуюся точку в пространстве и определяют, как говорят, вектор состояния спутника. Часто, однако, вместо координат и скоростей используют Кеплеровы элементы орбиты, которые также задают положение и движение спутника. На рис. 3.3 изображена шарообразная Земля и эллиптическая орбита ИСЗ в пространстве, а на рис. 3.4 показана проекция эллиптической орбиты на вспомогательную сферу (изображается большим кругом).

На этих рисунках точкой F обозначен центр масс Земли, в котором находится фокус орбитального эллипса и начало равноденственной системы координат xyz. Точки O, П, A – геометрический центр, перицентр и апоцентр эллиптической орбиты соответственно.

Большая полуось эллипса a (отрезок OA) характеризует размер орбиты, а эксцентриситет эллипса e – форму орбиты (отрезок $OF = ae$ – линейный эксцентриситет).

Точки пересечения орбиты с плоскостью земного экватора называются восходящим узлом (точка В.У.) и нисходящим узлом (точка Н.У.) орбиты, а отрезок прямой, их соединяющий, называется линией узлов.

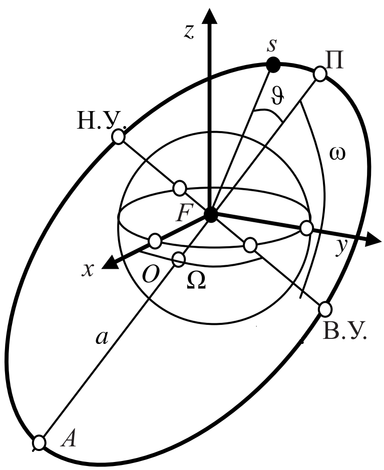

Рис. 3.3. Эллиптическая орбита ИСЗ в пространстве

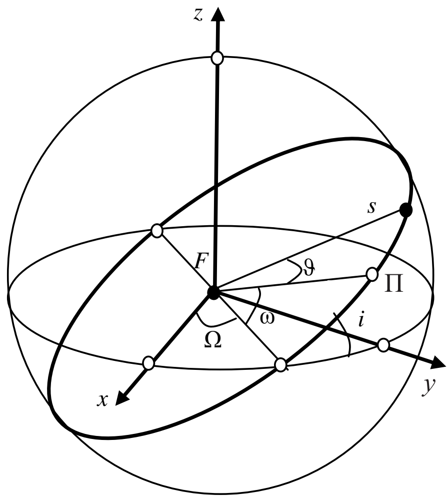

Рис. 3.4. Проекция эллиптической орбиты ИСЗ на вспомогательную сферу

Ориентировку орбитальной плоскости в пространстве (относительно равноденственной системы координат xyz) задают два угла Ω и i.

Угол Ω с вершиной в центре масс Земли между осью абсцисс равноденственной системы координат и направлением на восходящий узел орбиты называется долготой восходящего узла ($0 \leq \Omega < 2\pi$).

Двугранный угол i между плоскостью земного экватора и плоскостью орбиты или сферический угол между дугами экватора и проекции орбиты на вспомогательную небесную сферу называется наклоном орбиты ($0 \leq i \leq \pi$).

Ориентировка орбитального эллипса в плоскости орбиты задаётся углом ω.

Угол ω с вершиной в центре масс Земли между направлениями на восходящий узел и на перицентр орбиты называется аргументом перицентра ($0 \leq \omega < 2\pi$).

Положение спутника на орбите можно задать истинной аномалией ϑ.

Угол ϑ с вершиной в центре масс Земли между направлением на перицентр орбиты и направлением на спутник ($0 \leq \vartheta < 2\pi$).

Вместо истинной аномалии используются также либо эксцентрическая аномалия $E(0 \leq E < 2\pi)$, либо средняя аномалия $M(0 \leq M < 2\pi)$.

Кроме перечисленных выше элементов орбиты применяются также комбинации элементов: $\pi = \Omega + \omega$ – долгота перицентра; $\varepsilon = \pi + n(t_0 - \tau)$ – средняя долгота эпохи; t_0 – начальный момент, τ – момент прохождения через перицентр.

3.4. Связь элементов орбиты с постоянными интегрирования

Установим сначала ориентацию вектора Лапласа. Для этого запишем скалярное произведение геоцентрического радиус–вектора и вектора Лапласа

$$\vec{r} \cdot \vec{f} = \vec{r}\left(\dot{D}\vec{r} - D\dot{\vec{r}}\right) = r^2\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right) - r^2\dot{r}^2 =$$
$$= r^2 - \left(v^2 - \dot{r}^2\right) - \mu r = r^2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{u}^2 - \dot{r}^2\right) - \mu r = c^2 - \mu r. \tag{3.26}$$

Из определения скалярного произведения имеем также

$$\vec{r} \cdot \vec{f} = rf\cos\left(\vec{r}, \vec{f}\right). \tag{3.27}$$

Приравнивая правые части выражений (3.26) и (3.27), получаем опять уравнение орбиты

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{f}{\mu}\cos\left(\vec{r}, \vec{f}\right)}. \tag{3.28}$$

Сравнивая (3.28) с (2.21), замечаем, что

$$e = \frac{f}{\mu}; \tag{3.29}$$

$$\vartheta = \left(\vec{r}, \vec{f}\right). \tag{3.30}$$

Ранее было показано, что вектор Лапласа лежит в плоскости орбиты. Из выражения (3.30) следует, что вектор Лапласа направлен в перицентр орбиты.

Найдём теперь связь постоянных площадей и постоянных Лапласа с Кеплеровыми элементами орбиты.

Из рис. 3.5, на котором показаны проекция орбиты на вспомогательную сферу, векторы площадей и Лапласа, а также их проекции на оси равноденственной системы координат, легко усмотреть интересующие нас связи.

Алгебраические проекции вектора площадей на оси равноденственной системы координат выражаются следующими формулами

$$c_1 = c \sin i \sin \Omega; \tag{3.31}$$

$$c_2 = -c \sin i \cos \Omega; \tag{3.32}$$

$$c_3 = c \cos i, \tag{3.33}$$

где

$$c = \sqrt{\mu a \left(1 - e^2\right)}. \tag{3.34}$$

Из того же рисунка следует, что алгебраические проекции вектора Лапласа на координатные оси есть

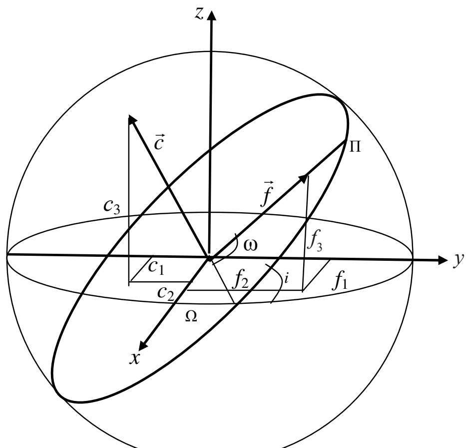

Рис. 3.5. Проекция орбиты на вспомогательную сферу, векторы площадей и Лапласа, а также их проекции на оси равноденственной системы координат

$$f_1 = f\left(\cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i\right); \qquad (3.35)$$

$$f_2 = f\left(\sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i\right); \qquad (3.36)$$

$$f_3 = f\sin\omega\sin i. \qquad (3.37)$$

где

$$f = \mu e. \qquad (3.38)$$

Из соотношения (2.18) с учётом (3.34) и (3.38) для постоянной энергии имеем:

$$h = \frac{f^2 - \mu^2}{c^2} = -\frac{\mu}{a}. \qquad (3.39)$$

Из выражения (3.39) следует, что для эллиптического движения постоянная энергии отрицательна.

3.5. Связь координат и скоростей с элементами орбиты

Для нахождения выражений, связывающих координаты ИСЗ с элементами орбиты, рассмотрим рис. 3.6, на котором показаны геоцентрическая равноденственная система координат и вращающаяся орбитальная система координат, ось абсцисс которой направлена в мгновенное положение спутника.

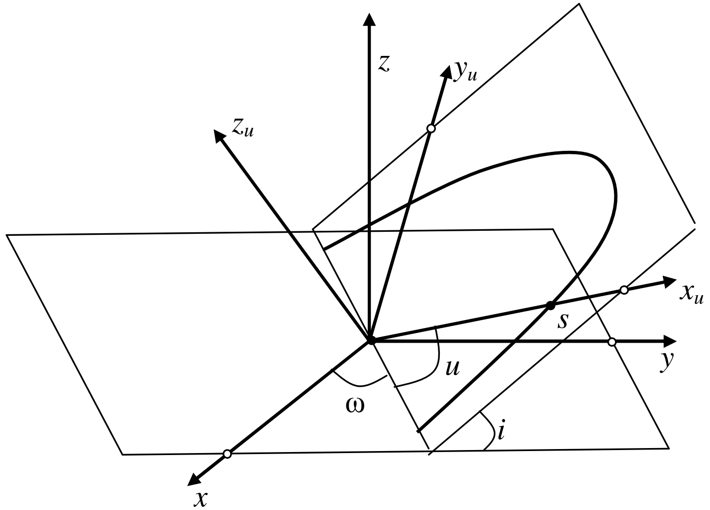

Рис. 3.6. Системы координат: средняя равноденственная *xyz* и вращающаяся орбитальная $x_u y_u z_u$

Приняв в качестве углов Эйлера углы Ω, u, i, преобразуем орбитальные координаты спутника к равноденственным геоцентрическим координатам:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} & \dfrac{1}{\sin u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial i} \\ \beta & \dfrac{\partial\beta}{\partial u} & \dfrac{1}{\sin u}\dfrac{\partial\beta}{\partial i} \\ \gamma & \dfrac{\partial\gamma}{\partial u} & \dfrac{1}{\sin u}\dfrac{\partial\gamma}{\partial i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_и \\ y_и \\ z_и \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что во вращающейся орбитальной системе координат координаты мгновенного положения спутника выражаются формулами $x_и = r,\ \ y_и = 0,\ \ z_и = 0,$ получим:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \qquad (3.40)$$

где

$$\alpha = \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i;$$

$$\beta = \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i;$$

$$\gamma = \sin u\sin i.$$

Выражения для составляющих скорости получаются дифференцированием по времени формул (3.40):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{r} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}. \qquad (3.41)$$

Дифференцируя по времени уравнение орбиты, получим

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\sin\vartheta.$$

Вторые члены в правых частях уравнений (3.41) удобно записать в форме

$$r\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{pmatrix}=r\dot{\vartheta}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\vartheta}\\ \dfrac{\partial\beta}{\partial\vartheta}\\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial\vartheta}\end{pmatrix},$$

где

$$r\dot{\vartheta}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos\vartheta).$$

Тогда искомые выражения для составляющих скорости будут

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\vartheta\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}+\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos\vartheta)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\vartheta}\\ \dfrac{\partial\beta}{\partial\vartheta}\\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial\vartheta}\end{pmatrix}. \qquad (3.42)$$

4. ДРУГИЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

4.1. Разложения в эллиптическом движении ИСЗ

Решение задачи двух тел позволяет получить координаты и составляющие скорости ИСЗ в виде функций аргумента широты (неявные функции времени). При этом аргумент широты вычисляется через истинную аномалию, которая, в свою очередь, связана с эксцентрической аномалией. Эксцентрическая же аномалия посредством решения трансцендентного уравнения Кеплера вычисляется через среднюю аномалию, которая непосредственно связана со временем.

Используя разложения в тригонометрические ряды, истинную и эксцентрическую аномалии, а также отношение r/a можно выразить через кратные средней аномалии. Коэффициентами этих рядов являются некоторые функции эксцентриситета. Эти ряды сходятся абсолютно для всех значений средней аномалии при $0 \le e < e^*$, где $e^*=0{,}662743419...$ – предел Лапласа [7].

Разложение для эксцентрической аномалии E. Для вывода этого разложения запишем уравнение Кеплера в виде

$$E - M = e \sin E. \tag{4.1}$$

Правую часть этого выражения можно разложить в ряд Фурье [5]

$$e \sin E = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(e) \sin kM,$$

где коэффициенты $b_k(e)$ можно представить интегралами следующего вида

$$b_k(e) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e \sin E \sin kM dM = -\frac{2e}{k\pi}\int_0^{\pi} \sin E d(\cos kM).$$

Используя правило интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$, получим

$$b_k(e) = -\frac{2e}{k\pi}(\sin E \cos kM)\Big|_0^{\pi} + \frac{2e}{k\pi}\int_0^{\pi} \cos kM \cos E dE =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \cos kMd(e\sin E)$$

или

$$b_k(e) = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \cos kMd(E - M) = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \cos kMdE =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \cos(kE - ke\sin E)\,dE.$$

Полученные интегралы можно выразить через функции Бесселя первого рода

$$b_k(e) = \frac{2}{k} J_k(ke).$$

Тогда уравнение (4.1) можно представить в следующем виде

$$E = M + 2\int_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke)\sin kM = M + 2J_1(e)\sin M + J_2(2e)\sin 2M + ... \quad (4.2)$$

Имея в виду, что функция Бесселя вычисляется по формуле

$$J_k(ke) = \frac{1}{k!}\left(\frac{ke}{2}\right)^k \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^{2\beta}}{\beta!(k+1)(k+2)...(k+\beta)},$$

выпишем искомое разложение, удерживая члены с точностью до квадрата эксцентриситета включительно

$$E = M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin 2M + 0(e^3). \quad (4.3)$$

Разложение для истинной аномалии ϑ. Для получения этого разложения будем опираться на полученный ряд (4.3). Предварительно воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\vartheta}{dM} = \frac{d\vartheta}{dE}\frac{dE}{dM}.$$

Выражение для производной $\frac{d\vartheta}{dE}$ можно найти путём дифференцирования соотношения $\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\mathrm{tg}\frac{E}{2}$:

$$\frac{d\vartheta}{dE}=\frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}.$$

Для получения выражения производной $\frac{dE}{dM}$ достаточно продифференцировать уравнение Кеплера $M=E-e\sin E$:

$$\frac{dE}{dM}=\frac{a}{r}.$$

Тогда можно записать:

$$d\vartheta=\left(\frac{a}{r}\right)^2\sqrt{1-e^2}\,dM=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{dE}{dM}\right)^2 dM. \qquad (4.4)$$

Выражение для производной $\frac{dE}{dM}$, входящее в уравнение (4.4), получим путём дифференцирования разложения эксцентрической аномалии (4.3)

$$\frac{dE}{dM}=1+e\cos M+e^2\cos 2M. \qquad (4.5)$$

После возведения этого выражения в квадрат и сохранения членов не выше второй степени эксцентриситета будем иметь

$$\left(\frac{dE}{dM}\right)^2=1+\frac{e^2}{2}+2e\cos M+\frac{5}{2}e^2\cos 2M. \qquad (4.6)$$

После подстановки выражения (4.6) в дифференциальное уравнение (4.4) и последующего интегрирования с учётом того, что $\sqrt{1-x}\cong 1-\frac{x}{2}$, искомое разложение с точностью до квадрата эксцентриситета запишем в виде

$$\vartheta=M+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M+0\left(e^3\right). \qquad (4.7)$$

Разложение (4.7) называется уравнением центра.

Разложение для $\frac{r}{a}$. Поскольку разложение для $\frac{a}{r}$ уже получено

$$\frac{a}{r}=\frac{dE}{dM}=1+e\cos M+e^2\cos 2M+0\left(e^3\right), \qquad (4.8)$$

то разложение для $\dfrac{r}{a}$ получается немедленно, принимая во внимание, что $\dfrac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2$.

$$\frac{r}{a}=1-e\cos M+e^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2M\right)+0\left(e^3\right). \qquad (4.9)$$

4.2. Канонические уравнения Гамильтона

Для получения уравнений Гамильтона нужно преобразовать уравнения Лагранжа второго рода $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=\dfrac{\partial L}{\partial q_k}$, $k = 1, 2,\ldots, n$ так, чтобы новые уравнения зависели от обобщённых координат q_k и импульсов p_k, т.е. нужно найти преобразование $\{q_k, \dot{q}_k\}\to\left(q_k, p_k\right)$. Если механическая система консервативна, то лагранжиан $L=L\left(q_k, \dot{q}_k\right)$ явно от времени не зависит, и его полный дифференциал будет иметь вид

$$dL=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_k}dq_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}d\dot{q}_k. \qquad (4.10)$$

Так как частная производная

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=p_k \qquad (4.11)$$

представляет собой обобщённый импульс, соответствующий q_k, то на основании уравнений Лагранжа второго рода частная производная $\dfrac{\partial L}{\partial q_k}=\dot{p}_k$ будет представлять собой производную по времени от обобщённого импульса (или обобщённую силу). Тогда

$$dL=\sum_{k=1}^{n}\dot{p}_k dq_k+\sum_{k=1}^{n}p_k d\dot{q}_k$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}p_k d\dot{q}_k-dL=-\sum_{k=1}^{n}\dot{p}_k dq_k.$$

Очевидно, что

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}_k - L\right) = \sum_{k=1}^{n} p_k d\dot{q}_k - dL + \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k dp_k,$$

Тогда

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}_k - L\right) = -\sum_{k=1}^{n} \dot{p}_k dq_k + \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k dp_k, \tag{4.12}$$

Можно доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}_k - L = \mathrm{const} = H = T - U. \tag{4.13}$$

На основании (4.13) и (4.12) получим каноническую (гамильтонову) форму уравнений движения или уравнения Гамильтона с $2n$ степенями свободы

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{4.14}$$

где функция $H(q_k, p_k)$, называется функцией Гамильтона или гамильтонианом.

Для решения канонических уравнений (4.14), описывающих динамическую систему, составляют уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = 0. \tag{4.15}$$

Гамильтониан здесь представлен в виде функции обобщённых координат q_k и величин $\dfrac{\partial S}{\partial q_k}$, где $\dfrac{\partial S}{\partial q_k} = p_k$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение с частными производными (4.15), получим искомую характеристическую функцию S. При этом в общем случае она оказывается зависящей от времени, обобщённых координат q_k и n постоянных γ_k.

Тогда решение уравнений Гамильтона получается из уравнений

$$p_k = \frac{\partial S(q_k, \gamma_k, t)}{\partial q_k}; \quad \beta_k = \frac{\partial S(q_k, \gamma_k, t)}{\partial \gamma_k}; \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{4.16}$$

где β_k – независимые постоянные.

4.3. Решение задачи двух тел методом Гамильтона–Якоби

Функцию Лагранжа для единичной массы запишем относительно полярной равноденственной системы координат (r – модуль радиус–вектора ИСЗ, α – прямое восхождение ИСЗ, δ – склонение ИСЗ)

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\alpha}^2\cos^2\delta+r^2\dot{\delta}^2\right)+\frac{\mu}{r}.$$

Используя уравнение (4.11), получаем

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=\dot{r};$$

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}=r^2\dot{\alpha}\cos^2\delta;$$

$$p_\delta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}}=r^2\dot{\delta}.$$

В силу того, что гамильтониан задаётся формулой (4.13), можно записать

$$H=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{p_\delta^2}{r^2}+\frac{p_\alpha^2}{r^2\cos^2\delta}\right)-\frac{\mu}{r}. \qquad (4.17)$$

Тогда уравнение Гамильтона–Якоби (4.15) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \delta}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\delta}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2\right]-\frac{\mu}{r}=0. \qquad (4.18)$$

Поскольку в уравнении (4.18) явно не фигурируют ни t, ни α, то можно положить

$$S=\gamma_1 t+\gamma_2\alpha+S_1. \qquad (4.19)$$

Подставив выражение (4.19) в уравнение (4.18), получаем

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \delta}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\delta}\gamma_2^2=-2\gamma_1+\frac{2\mu}{r}. \qquad (4.20)$$

Или

$$\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial \delta}\right)^2+\gamma_2^2\sec^2\delta\right]+r^2\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+2\gamma_1-\frac{2\mu}{r}\right]=0.$$

Можно положить, что

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \delta}\right)^2+\gamma_2^2\sec^2\delta=\gamma_3^2; \tag{4.21}$$

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+2\gamma_1-\frac{2\mu}{r}=\gamma_3^2 r^{-2}. \tag{4.22}$$

Тогда характеристическая функция S будет равна

$$S=\gamma_1 t+\gamma_2\alpha+\int_0^{\delta}\left(\gamma_3^2-\gamma_2^2\sec^2\delta\right)^{1/2}d\delta+\int_{r_0}^{r}\left(-2\gamma_1+\frac{2\mu}{r}-\frac{\gamma_3^2}{r^2}\right)^{1/2}dr. \tag{4.23}$$

И, таким образом, решение задачи методом Гамильтона–Якоби для случая невозмущённого движения будет иметь вид

$$\beta_1=t-\int_{r_0}^{r}\left(-2\gamma_1+\frac{2\mu}{r}-\frac{\gamma_3^2}{r^2}\right)^{-1/2}dr; \tag{4.24}$$

$$\beta_2=\alpha-\gamma_2\int_0^{\delta}\sec^2\delta\left(\gamma_3^2-\gamma_2^2\sec^2\delta\right)^{-1/2}d\delta; \tag{4.25}$$

$$\beta_3=\gamma_3\int_0^{\delta}\left(\gamma_3^2-\gamma_2^2\sec^2\delta\right)^{-1/2}d\delta-\gamma_3\int_{r_0}^{r}r^{-2}\left(-2\gamma_1+\frac{2\mu}{r}-\frac{\gamma_3^2}{r^2}\right)^{-1/2}dr. \tag{4.26}$$

Постоянные интегрирования β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 в данном случае называются каноническими элементами орбиты или элементами Якоби.

4.4. Связь между элементами Якоби и Кеплеровыми элементами

Рассмотрим выражение (4.24).

В эллиптическом движении соблюдается условие

$$a(1-e)\le r\le a(1+e). \tag{4.27}$$

Так как элементы орбиты должны быть вещественными, то r должно также заключаться в пределах

$$r_1\le r\le r_2, \tag{4.28}$$

где r_1, r_2 – корни квадратного уравнения

$$2\gamma_1 r^2-2\mu r+\gamma_3^2=0. \tag{4.29}$$

Так как сами интервалы (4.27) и их границы (4.28) должны совпадать, то применяя теорему Виета к свойствам корней квадратного уравнения (4.29), можно записать

$$r_1 + r_2 = 2a = \frac{\mu}{\gamma_1};$$

$$r_1 r_2 = a^2\left(1 - e^2\right) = \frac{\gamma_3^2}{2\gamma_1}.$$

Откуда находим

$$\gamma_1 = \frac{\mu}{2a}; \tag{4.30}$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\mu a\left(1 - e^2\right)}. \tag{4.31}$$

Так как минимальное значение $r_{\min} = r_1 = q$ в перицентре, то

$$\beta_1 = \tau. \tag{4.32}$$

Рассмотрим теперь соотношение (4.25). Пусть $\delta = 0$. В этом случае ИСЗ должен находиться в одном из узлов его орбиты. Таким образом,

$$\beta_2 = \Omega. \tag{4.33}$$

Так как интеграл в (4.25) должен быть вещественным, то

$$\gamma_3^2 - \gamma_2^2 \sec^2 \delta \geq 0.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$|\delta| \leq i,$$

а тогда

$$\gamma_2 = \gamma_3 \cos i = \sqrt{\mu a\left(1 - e^2\right)} \cos i. \tag{4.34}$$

Рассмотрим, наконец (4.26). Воспользуемся соотношениями $\sin\delta = \sin i \sin u,\ \ d\delta = \dfrac{\sin i \cos u du}{\cos\delta}.$

Тогда

$$\gamma_3 \int_0^{\delta} \left(\gamma_3^2 - \gamma_2^2 \sec\delta\right)^{-1/2} d\delta = \sqrt{\mu p} \int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\left(\mu p - \mu p \dfrac{\cos^2 i}{\cos^2 \delta}\right)^{1/2}} =$$

$$= \int_0^{\delta} \frac{\cos\delta d\delta}{\sqrt{\cos^2\delta - \cos^2 i}} = \int_0^{u} \frac{\sin i \cos u du}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 u - 1 + \sin^2 i}} = \int_0^{u} du = u.$$

Отсюда

$$u-\beta_3=\gamma_3\int\limits_{r_0}^{r} r^{-2}\left(-2\gamma_1+\frac{2\mu}{r}-\frac{\gamma_3^2}{r^2}\right)^{-1/2} dr.$$

В перицентре, когда $r = r_0$, а $u = \omega$

$$\beta_3 = \omega. \tag{4.35}$$

На основании соотношений (4.30)–(4.35) выпишем формулы обратного перехода

$$a=\frac{\mu}{2\gamma_1};\quad e^2=1-\frac{2\gamma_1\gamma_3^2}{\mu^2};\quad \cos i=\frac{\gamma_2}{\gamma_3};$$
$$\Omega=\beta_2;\quad \omega=\beta_3;\quad \tau=\beta_1. \tag{4.36}$$

4.5. Регуляризация уравнений движения с помощью первых интегралов

Ньютоновские дифференциальные уравнения вида (1.5) имеют особенность в начале координат, так как гравитационное притяжение становится бесконечно большим в этой точке. Для устранения этой сингулярности используют процедуру регуляризации. Известно несколько способов регуляризации, например, регуляризация Кустаанхеймо–Штифеля [11], регуляризация первыми интегралами [4]. Здесь мы рассмотрим регуляризацию с помощью первых интегралов.

Увеличение скорости небесного тела при тесном сближении должно компенсироваться скалярным множителем, обращающимся в ноль при соударении. Подходящим множителем является расстояние до центральной массы. Поэтому новый параметр вместо времени можно задать формулой

$$ds=\frac{dt}{r}. \tag{4.37}$$

При выполнении процедуры регуляризации вместо физического времени используют новую независимую переменную. Для преобразования времени применим простейшее соотношение (4.37).

На основании этого соотношения можно записать эквивалентное выражение

$$\frac{d}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d}{ds}. \tag{4.38}$$

Дифференцируя выражение (4.38) по времени ещё раз, получим

$$\frac{d^2}{dt^2}=\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{ds^2}-\frac{r'}{r^3}\frac{d}{ds}. \tag{4.39}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по новой переменной s.

Воспользовавшись соотношением (4.39), запишем уравнение невозмущённого движения относительно новой независимой переменной s

$$\frac{1}{r^2}\vec{r}''-\frac{r'}{r^3}\vec{r}'+\mu\frac{\vec{r}}{r^3}=0. \tag{4.40}$$

После умножения на r^2 получим

$$\vec{r}''-\frac{r'}{r}\vec{r}'+\mu\frac{\vec{r}}{r}=0. \tag{4.41}$$

Введение параметра s полностью задачу регуляризации не решает, так как уравнение (4.41) во втором и третьем членах левой части содержит r в знаменателях. Для устранения этой особенности воспользуемся известными первыми интегралами невозмущённого движения: интегралом энергии и тремя интегралами Лапласа.

Интеграл энергии (2.9) для удобства запишем в виде:

$$h=\left(\dot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right)-\frac{2\mu}{r}. \tag{4.42}$$

Первый член в правой части (4.42) представляет собой квадрат орбитальной скорости, который записан в виде скалярного произведения двух векторов скорости.

Вспомогательную функцию D (2.10), входящую в интегралы Лапласа (2.14), представим в форме:

$$D=\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)=r\cdot\dot{r}. \tag{4.43}$$

Используя выражение (4.43) и переходя к новой переменной s, интегралы Лапласа можно записать в виде

$$\vec{f}=\frac{\mu}{r}\vec{r}+h\vec{r}-\frac{r'\vec{r}'}{r}. \tag{4.44}$$

Заменив второй и третий члены левой части в уравнении (4.41) их выражениями из соотношения (4.44), получим преобразованное уравнение движения в форме

$$\vec{r}''-h\vec{r}+\vec{f}=0. \tag{4.45}$$

Уравнение (4.45) представляет собой линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения [10].

Результат интегрирования уравнения (4.45) можно выразить через начальные условия (координаты и составляющие скорости в начальный момент времени):

$$\vec{r}=\left(\vec{r}_0-\frac{\vec{f}}{h}\right)\cos\left(\sqrt{-h}s\right)+\frac{r_0\dot{\vec{r}}_0}{\sqrt{-h}}\sin\left(\sqrt{-h}s\right)+\frac{\vec{f}}{h}. \qquad (4.46)$$

Заметим попутно, что уравнение (4.46) решает, по существу, задачу вычисления эфемерид невозмущённого движения ИСЗ по заданным начальным условиям. Однако независимой переменной в этих уравнениях является параметр s. На практике же нужно знать, какому физическому моменту времени соответствуют координаты, вычисленные по формуле (4.46). Вычисление момента физического времени осуществляется по формуле:

$$t=t_0+\int_0^S r ds. \qquad (4.47)$$

Для вычисления интеграла в уравнении (4.47) нужно найти выражение для r в функции s. Оказывается, что это легко можно сделать, составив дифференциальное уравнение для расстояния, которое имеет вид

$$r''-hr=\mu. \qquad (4.48)$$

Решение уравнения (4.48) с использованием начальных условий можно представить в виде

$$r=\left(r_0-\frac{\mu_s}{h}\right)\cos\left(\sqrt{-h}s\right)+\frac{\left(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0\right)}{\sqrt{-h}}\sin\left(\sqrt{-h}s\right)-\frac{\mu}{h}. \qquad (4.49)$$

Подставив теперь выражение (4.49) в подынтегральную функцию (4.47), легко вычислить момент физического времени, соответствующий значению параметра s:

$$t=t_0\left(r_0+\frac{\mu}{h}\right)\frac{1}{\sqrt{-h}}\sin\left(\sqrt{-h}s\right)+\frac{\left(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0\right)}{h}\cos\left(\sqrt{-h}s\right)-\frac{\left(\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}_0\right)}{h}-\frac{\mu}{h}s. \qquad (4.50)$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

П. 1. Вычисление элементов невозмущённой орбиты по наблюдениям спутника с пункта земной поверхности

Постановка задачи. Пусть с пункта земной поверхности, координаты которого известны, выполнены наблюдения спутника и определены топоцентрические направления и расстояния до трёх его мгновенных положений. В результате вычислены геоцентрические прямоугольные координаты этих мгновенных положений. Требуется вычислить элементы орбиты спутника. Для решения подобной задачи разработано много методов определения орбит. Наиболее широко используемым является классический метод Гаусса. Здесь приводится алгоритм модифицированного метода Гаусса.

Исходные данные

Момент времени, с	Положение ИСЗ в равноденственной системе координат		
	x, м	y, м	z, м
36000	9893543,330	–22717944,946	5957960,455
36300	10457176,427	–22715833,949	4913681,348
36600	10998150,495	–22664501,351	3858755,056

Решение.

1. Вычисляем геоцентрические прямые восхождения, склонения и расстояния ИСЗ

$$\alpha_s = \operatorname{arctg}\frac{y_s}{x_s};$$

$$\delta_s = \operatorname{arctg}\frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}};$$

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}; \quad s = 1, 2, 3.$$

s	α_s, градусы	δ_s, градусы	r_s, м
1	293,5328674	13,5199048	25484986,070
2	294,7188591	11,1164521	25485405,926
3	295,885392	8,7085137	25485857,380

2. Вычисляем угол наклона i плоскости орбиты к плоскости экватора, предварительно определив компоненты вектора $\vec{b}$, перпендикулярного плоскости орбиты

$$\vec{b}=\left[\vec{r}_{s_1}\times\vec{r}_{s_3}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(y_1z_3-y_3z_1\right)+\vec{j}\left(x_3z_1-x_1z_3\right)+\vec{k}\left(x_1y_3-x_3y_1\right);$$

$$\cos i=\frac{x_1y_3-x_3y_1}{\sqrt{\left(y_1z_3-y_3z_1\right)^2+\left(x_3z_1-x_1z_3\right)^2+\left(x_1y_3-x_3y_1\right)^2}}=0,4241994.$$

i = 64,9000000°.

3. Вычисляем долготу восходящего узла

$$\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)=\mathrm{ctg}i\,\mathrm{tg}\delta_1=0,1126332;$$

$$\mathrm{tg}\left(\alpha_1-\Omega\right)=\frac{\mathrm{tg}\delta_1\sin\left(\alpha_3-\alpha_1\right)}{\mathrm{tg}\delta_3-\sin\delta_1\cos\left(\alpha_3-\alpha_1\right)}=-0,11332;$$

$$\alpha_1-\Omega=173,5328674^\circ;$$

$$\Omega=120,0000000^\circ;$$

4. Вычисляем аргумент широты

$$\cos u_s=\cos\left(\alpha_s-\Omega\right)\cos\delta_s;$$

$$\sin u_s=\frac{\sin\delta_s}{\sin i};\quad s=1,2,3.$$

s	$\cos u_s$	$\sin u_s$	u_s, градусы
1	-0,9661017	0,2581617	165,0389898
2	-0,9770720	0,212909	167,7071193
3	-0,9859236	0,1671962	170,3751575

5. Вычисляем фокальный параметр

$$p=\frac{r_1[\sin(u_3-u_1)+\sin(u_1-u_2)+\sin(u_2-u_3)]}{\sin(u_2-u_3)+\frac{r_1}{r_2}\sin(u_3-u_1)+\frac{r_1}{r_3}\sin(u_1-u_2)}=25499988,212 \text{ м.}$$

6. Вычисляем истинную аномалию

$$\operatorname{tg}\vartheta_1=\frac{\frac{p-r_1}{r_1}\cos(u_2-u_1)-\frac{p-r_2}{r_2}}{\frac{p-r_1}{r_1}\sin(u_2-u_1)};$$

$$\vartheta_1=30,0389685^\circ;$$

$$\vartheta_3=\vartheta_1+\left(u_3-u_1\right)=35,3751361^\circ.$$

7. Вычисляем эксцентриситет орбиты

$$e=\frac{p-r_1}{r_1\cos\vartheta_1}=0,0006800.$$

8. Вычисляем аргумент перицентра

$$\omega = u_1 - \vartheta_1 = 135,0000214^\circ.$$

9. Вычисляем большую полуось орбиты

$$a=\frac{p}{1-e^2}=25500000,004 \text{ м.}$$

10. Вычисляем среднее движение

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}=0,00015505 \text{ с}^{-1}.$$

11. Вычисляем эксцентрическую аномалию

$$\cos E_1=\frac{e+\cos\vartheta_1}{1+e\cos\vartheta_1}=0,8658554;$$

$$\sin E_1=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin\vartheta_1}{1+e\cos\vartheta_1}=0,5002943;$$

$$E_1=30,0194707^\circ.$$

12. Вычисляем момент предыдущего прохождения ИСЗ через перицентр

$$\tau = t_1 - \frac{E_1 - e\sin E_1}{n} = 9^{\mathrm{h}}\,03^{\mathrm{m}}\,42^{\mathrm{s}},933.$$

Найденные элементы относим к моменту $t_0 = \dfrac{t_1 + t_3}{2} = 36300$ с и вычисляем начальное значение средней аномалии M_0 на эпоху t_0

$$M_0 = n\left(t_0 - \tau\right) = 32{,}6650111^{\circ}.$$

П.2. Вычисление невозмущённой эфемериды

Постановка задачи. Пусть заданы элементы орбиты a, e, i, Ω, ω, M_0 в момент t_0. Требуется на заданный момент времени t вычислить прямоугольные координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ спутника.

Исходные данные

Элементы орбиты и моменты времени	Значения
a	25500000,004 м
e	0,0006800
i	64,9000000°
Ω	120,0000000°
ω	135,0000214°
M_0	32,6650111°
t_0	36300 с
t	40700 с

Решение

1. Вычисляем среднее движение ИСЗ

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}} = 0{,}00015505 \text{ с}^{-1},$$

где m – геоцентрическая гравитационная постоянная.

2. Вычисляем среднюю аномалию на заданный момент времени

$$M = M_0 + n\left(t - t_0\right) = 160{,}5865692^{\circ}.$$

3. Задавшись точностью вычислений ε, методом последовательных приближений вычисляем эксцентрическую аномалию

$$E_0 = M + e\sin M;$$

$$E_k = M + e\sin E_{k-1}; \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Вычисления прекращаем, когда $\left|E_k - E_{k-1}\right| < \varepsilon = 0,0000001^\circ$.

$$E_0 = 160,5865692^\circ;$$
$$E_1 = 160,5995192^\circ;$$
$$E_2 = 160,5995109^\circ;$$
$$E_3 = 160,5995109^\circ.$$

3. Вычисляем истинную аномалию

$$\vartheta = E + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{e\sin E}{1+\sqrt{1-e^2} - e\cos E}\right) = 160,6124485^\circ.$$

4. Вычисляем аргумент широты

$$u = \omega + \vartheta = 295,6124699^\circ.$$

5. Вычисляем геоцентрическое расстояние до спутника

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\vartheta} = 25516355,436 \text{ м.}$$

6. Вычисляем прямоугольные координаты спутника

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i \\ \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i \\ \sin u\sin i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2937656{,}611 \text{ м} \\ 14432705{,}729 \text{ м} \\ -20836304{,}223 \text{ м} \end{pmatrix}.$$

7. Вычисляем составляющие скорости спутника

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e\sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i \\ \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i \\ \sin u\sin i \end{pmatrix} +$$

$$+\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos\vartheta)\begin{pmatrix} -\cos\Omega\sin u - \sin\Omega\cos u\cos i \\ -\sin\Omega\sin u + \cos\Omega\cos u\cos i \\ \cos u\sin i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2408{,}799 \text{ мс}^{-1} \\ 2723{,}781 \text{ мс}^{-1} \\ 1545{,}981 \text{ мс}^{-1} \end{pmatrix}.$$

П. 3. Вычисление элементов орбиты по координатам и скоростям

Постановка задачи. Пусть на момент времени t заданы координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ спутника. Требуется вычислить элементы орбиты $a, e, i, \Omega, \omega, M$ на тот же момент времени.

Исходные данные

Элементы орбиты и моменты времени	Значения
x	2937656,611 м
y	14432705,729 м
z	–20836304,223 м
$\dot{x}$	–2408,799 мс$^{-1}$
$\dot{y}$	2723,781 мс$^{-1}$
$\dot{z}$	1545,981 мс$^{-1}$
t	40700 с

Решение

1. Вычисляем постоянные площадей

$$c_1 = y\dot{z} - \dot{y}z = 79066218388{,}452 \text{ м}^2\text{с}^{-1};$$

$$c_2 = \dot{x}z - x\dot{z} = 45648699107{,}886 \text{ м}^2\text{с}^{-1};$$

$$c_3 = x\dot{y} - \dot{x}y = 42766876061{,}818 \text{ м}^2\text{с}^{-1};$$

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = 100818035631{,}427 \text{ м}^2\text{с}^{-1}.$$

2. Вычисляем фокальный параметр

$$p = \frac{c^2}{\mu} = 25499912{,}415 \text{ м}.$$

3. Вычисляем угол наклона плоскости орбиты к плоскости экватора

$$i = \arccos\left(\frac{c_3}{c}\right) = 64{,}900048^\circ.$$

4. С помощью формул

$$\sin\Omega = \frac{c_1}{c\sin i} = 0{,}8660264;$$

$$\cos\Omega = -\frac{c_2}{c\sin i} = -0{,}4999983$$

вычисляем долготу восходящего узла $\Omega = 119{,}9998895^\circ$.

5. Вычисляем квадрат скорости спутника и геоцентрическое расстояние до спутника

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 15611304{,}635 \text{ м}^2\text{с}^{-2};$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 25516355{,}435 \text{ м}.$$

6. Вычисляем постоянную энергии

$$h = v^2 - \frac{2\mu}{r} = -15631436{,}203 \text{ м}^2\text{с}^{-2}.$$

7. Вычисляем большую полуось орбиты спутника

$$a = -\frac{\mu}{h} = 25499924{,}307 \text{ м}.$$

8. Вычисляем составляющие вектора Лапласа

$$f_1 = \dot{D}x - D\dot{x} = 25360866396{,}947 \text{ м}^3\text{с}^{-2};$$

$$f_2 = \dot{D}y - D\dot{y} = -207390350508{,}155 \text{ м}^3\text{с}^{-2};$$

$$f_3 = \dot{D}z - D\dot{z} = 174478769419{,}079 \text{ м}^3\text{с}^{-2};$$

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} = 272207222546{,}161 \text{ м}^3\text{с}^{-2},$$

где

$$D = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 22804273{,}910 \text{ м}^2\text{с}^{-1};$$

$$\dot{D} = \frac{\mu}{r} + h = -10065{,}784 \text{ м}^2\text{с}^{-2}.$$

9. Вычисляем эксцентриситет орбиты спутника по одной из формул

$$e = \frac{f}{\mu} = 0{,}0006829;$$

$$e = \sqrt{\frac{a-p}{a}} = 0{,}0006829.$$

10. На основании формул

$$\sin\omega = \frac{f_3}{f\sin i} = 0,7078175;$$

$$\cos\omega = \frac{f_1\cos\Omega + f_2\sin\Omega}{f} = -0,7063953$$

вычисляем аргумент перицентра ω = 134,9423788°.

11. С помощью формул

$$\cos\vartheta = \frac{p-r}{er} = -0,9436286;$$

$$\sin\vartheta = \frac{D}{er}\sqrt{\frac{p}{\mu}} = 0,3310062$$

вычисляем истинную аномалию ϑ = 160,6701379°.

12. С помощью формул

$$\cos E = \frac{e+\cos\vartheta}{1+e\cos\vartheta} = -0,9435537;$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta} = 0,3312196$$

вычисляем эксцентрическую аномалию E = 160,6571822°.

13. Вычисляем среднюю аномалию

$$M = E - e\sin E = 160,6442224°.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Космическая* геодезия: учебник для вузов / В.Н. Баранов, Е.Г. Бойко, И.И. Краснорылов и др. – М.: Недра. 1986.

2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы.– М.: Наука, 1968. – 800 с.

3. *Крылов В.И.* Космическая геодезия: учебное пособие. М.: УПП «Репрография» МИИГАиК, 2002. – 168 с.

4. *Крылов В.И.* Использование первых интегралов для регуляризации уравнений движения небесных тел // Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъёмка». – 2008. – № 4. – С. 38–40.

5. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы / Перевод с англ., под ред. И.И. Шевченко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 588 с.

6. *Рой А.* Движение по орбитам. – М.: Мир, 1981. – 544 с.

7. *Справочное* руководство по небесной механике и астродинамике. Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976.

8. *Урмаев М.С.* Орбитальные методы космической геодезии. – М.: Недра, 1981. – 256 с.

9. *Херрик С.* Астродинамика. – М.: Мир, 1976.

10. *Шипачев В.С.* Курс высшей математики: учебник / Под ред. А.Н. Тихонова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2004. – 600 с.

11. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика.– М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975. – 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Внутривузовское издание

Подписано в печать 12.10.2015 Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Объем 4,5 усл. печ. л.
Тираж 75 экз. Заказ № 000. Продаже не подлежит.

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК