Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии

Е.А. Русяева

Теория математической обработки геодезических измерений

Часть I

Теория ошибок измерений

Москва
2016

Рецензенты:
профессор, кандидат техн. наук **В.В. Голубев**;
профессор, кандидат техн. наук **Н.В. Усова**

Составитель: Е.А. Русяева
Теория математической обработки геодезических измерений: учебное пособие Часть I. Теория ошибок измерений. — М.: МИИГАиК, 2016 . — 56 с.

Подробно изложены следующие вопросы: нормальный закон распределения и его значение для теории ошибок измерений; необходимые сведения из математической статистики; задачи теории ошибок измерений; критерии точности измерений; средняя квадратическая ошибка функции общего вида; математическая обработка рядов равноточных и неравноточных измерений одной величины; оценка точности по разностям двойных измерений. Приведены типовые примеры, которые поясняют использование теоретических положений, необходимых для самостоятельной подготовки студентов заочного отделения к зачету и выполнения ими индивидуальных заданий контрольной работы №1.

Учебное пособие написано в соответствии с утверждённой программой курса «Теория математической обработки геодезических измерений» для студентов заочного отделения.

Электронная версия учебного пособия размещена на сайте библиотеки МИИГАиК http://library.miigaik.ru

ПРОГРАММА КУРСА

Теория математической обработки геодезических измерений

Часть 1

Теория ошибок измерений

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Основные параметры нормального закона. Функция нормального распределения и её связь с интегралом вероятностей. Смысл интеграла вероятностей. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный интервал. Формулы связи среднего и вероятного отклонений со средним квадратическим отклонением.

Центральная предельная теорема — теорема А.М. Ляпунова. Значение нормального закона для теории ошибок измерений.

Понятие о других законах распределения: равномерном, Стьюдента, Пирсона.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

Предмет и основные понятия. Основные задачи: сравнение теоретического и статистического распределений; критерии согласия; оценивание параметров. Понятие о наилучших оценках. Методы оценивания параметров. Дополнительные характеристики формы кривой распределения случайной величины: асимметрия и эксцесс. Понятие о доверительных интервалах. Доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ.

Статистическая связь между двумя случайными величинами. Линейная и нелинейная корреляция. Коэффициент корреляции и корреляционное отношение, их свойства. Уравнение регрессии. Понятие о множественной корреляции.

ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ.

Задачи теории ошибок измерений. Классификация ошибок измерений. Кривая Гаусса и её свойства. Свойства случайных ошибок. Основные постулаты теории ошибок.

КРИТЕРИИ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ.

Средняя квадратическая ошибка и её достоинства. Вероятная и средняя ошибки и их связь со средней квадратической ошибкой при нормальном законе распределения. Исследование на нормальный закон распределения ряда истинных ошибок.

ОШИБКИ ОКРУГЛЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВА.

Понятие о равномерном законе распределения ошибок округления. Средняя квадратическая ошибка округлений, её связь с предельной ошибкой округления.

СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ФУНКЦИЙ.

Коррелированно и некоррелированно измеренных аргументов. Типовые примеры.

РАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ.

Основные этапы математической обработки ряда многократных независимых равноточных измерений одной величины: определение наиболее надёжного значения измеряемой величины; определение средней квадратической ошибки отдельного результата измерений; определение средней квадратической ошибки наиболее надёжного значения. Построение доверительных интервалов, с заданной вероятностью накрывающих неизвестные точные значения параметров: истинного значения и среднего квадратического отклонения отдельного результата измерений. Порядок обработки ряда равноточных измерений одной величины, выполняемый по определённой схеме со всеми необходимыми контролями вычислений.

НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ.

Понятие о весе. Обратный вес функции коррелированно и некоррелированно измеренных аргументов. Основные этапы математической обработки ряда многократных независимых неравноточных измерений одной величины: определение среднего весового - наиболее надёжного значения измеряемой величины; определение средней квадратической ошибки измерения с весом, равным единице; определение средней квадратической ошибки наиболее надёжного значения. Построение доверительных интервалов для истинного значения и среднего квадратического отклонения измерения с весом, равным единице. Порядок обработки, необходимые контроли вычислений.

ДВОЙНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ.

Математическая обработка двойных равноточных измерений ряда однородных величин. Критерий обнаружения систематических ошибок. Математическая обработка двойных неравноточных измерений ряда однородных величин. Порядок обработки, необходимые контроли вычислений.

ВВЕДЕНИЕ

Курс ***«Теория математической обработки геодезических измерений»*** состоит из двух частей:

I-я часть — теория ошибок измерений;

II-я часть — метод наименьших квадратов (изучается на третьем курсе).

Изучение курса завершается сдачей зачёта на втором курсе и экзамена — на третьем.

Настоящее методическое учебное пособие написано с таким расчётом, чтобы студент, проработав теоретический материал, изложенный в нем, смог самостоятельно выполнить индивидуальные задания контрольной работы №1 и подготовиться к зачёту.

Современное изложение курса «*Теория ошибок измерений*» ведется на основе положений теории вероятностей с использованием методов математической статистики.

Полный курс «*Теории вероятностей*» читается на 2-м курсе для студентов всех специальностей преподавателями кафедры высшей математики.

Для изучения курса «*Теория ошибок измерений*», который читается также для студентов 2-го курса, необходимо знание следующих основных понятий теории вероятностей : законы распределения вероятностей и основные параметры случайных величин, и др.

Поэтому глава 1 настоящего пособия посвящена нормальному закону распределения вероятностей и его значению для «*Теории ошибок измерений*».

Решение основных задач «*Теории ошибок измерений*» требует от студентов умения применять методы математической статистики.

Поэтому в главе 2-й пособия приводятся необходимые сведения из математической статистики.

В главе 3-й подробно излагаются следующие вопросы:

основные понятия и задачи теории ошибок измерений; критерии точности измерений; оценка точности функций общего вида коррелированно и некоррелированно измеренных аргументов; математическая обработка результатов многократных равноточных и неравноточных измерений одной величины; оценка точности по разностям двойных измерений.

1. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Результаты измерений неизбежно сопровождаются случайными ошибками измерений, подчиняющимися, как правило, нормальному закону распределения вероятностей.

1.1 Нормальный закон и его основные параметры

Случайная величина X с плотностью распределения вида

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{1.1}$$

и графиком плотности, представленным на рис. 1.1, считается распределённой по нормальному закону.

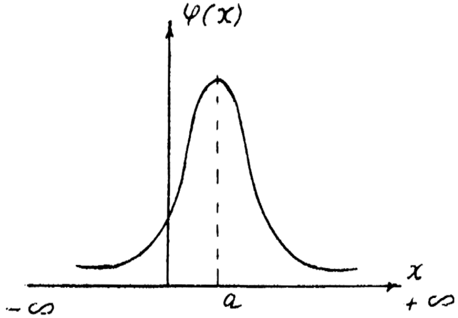

Рис. 1.1. Кривая плотности нормального закона

Кривая распределения по нормальному закону имеет симметричный колоколообразный вид. Можно показать, что величины а и σ^2, входящие в выражение (1.1), являются основными параметрами нормально распределённой случайной величины X: $a=M(X)$, $\sigma^2=D(X)$.

$M(X)$ — *это* ***математическое ожидание****, основная характеристика центра возможных значений случайной величины X*, а $D(X)$ называется ***дисперсией*** и является характеристикой *степени разброса возможных значений случайной величины X относительно ее центра.*

Параметр σ (положительная величина корня квадратного из дисперсии, $\sigma(X)=+\sqrt{\mathrm{D}(X)}$) называется ***средним квадратическим отклонением*** (СКО) и является более *наглядной характеристикой степени разброса случайной величины*, так как размерность параметра σ совпадает с размерностью самой случайной величины X.

При изменении параметра a кривая $\varphi(x)$, не изменяя своей формы, перемещается вдоль оси абсцисс.

При изменении параметра σ форма кривой изменяется: если $\sigma_1>\sigma_2$, то параметру σ_2 соответствует более узкая в направлении оси ординат кривая и более высокое положение вершины кривой, то есть меньший разброс значений x_i относительно параметра $a=M(X)$.

1.2 Понятие о центральной предельной теореме

Теоремы, устанавливающие условия, при которых возникает нормальный закон, как предельный закон, известны в теории вероятностей под названием ***«центральной предельной теоремы»***, или т***еоремы А.М. Ляпунова.***

Теорема Ляпунова может быть сформулирована так: *если некоторая случайная величина есть сумма достаточно большого числа других случайных независимых величин, отклоняющихся от своих математических ожиданий на малые величины по сравнению с отклонением суммарной величины, то закон распределения этой суммарной случайной величины будет близок к нормальному*.

Теорема Ляпунова имеет большое значение для теории ошибок измерений.

Можно полагать, что основные требования центральной предельной теоремы выполняются в *отношении природы образования случайных ошибок измерений*.

Ошибки измерений $\Delta(\Delta_i = x_i - X)$ действительно образуются в результате сложения большого числа элементарных ошибок, каждая из которых вызвана действием отдельной причины, не зависящей от остальных, и влияние элементарных ошибок на результаты измерений мало по сравнению с влиянием суммарной ошибки Δ.

Следовательно, на основании теоремы Ляпунова закон такой суммарной случайной величины (ошибки Δ) стремится к нормальному распределению с плотностью вида (1.1).

Знание закона распределения случайной величины необходимо для решения ряда практических задач. Таких, как, например, установление допусков, ограничивающих использование результатов измерений в заданных пределах точности; построение доверительных интервалов, с заданной вероятностью накрывающих неизвестное истинное значение измеряемой величины; и других задач.

1.3 вероятность попадания нормально распределённой случайной величины на заданный интервал

Если от случайной величины X перейти к её нормированному значению $t=(X-M_X)/\sigma$, для которой $M(t)=0$ и $D(t)=1$, то в этом случае плотность распределения случайной величины t примет вид:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}, \tag{1.2}$$

а функция распределения будет определяться формулой

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-z^2}{2}} dz, \tag{1.3}$$

где $z=(x-M_X)/\sigma$.

Геометрически функция распределения $F(t)$ может быть представлена на рис. 1.2 в виде заштрихованной площади под кривой распределения.

Вероятность попадания случайной величины X на интервал $(\alpha; \beta)$, как известно, определяется по формуле $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$.

Переходя к нормированным значениям границ интервала $(\alpha; \beta)$ $t_1=(\alpha-M_X)/\sigma$ и $t_2=(\beta-M_X)/\sigma$, получим формулу для вычисления вероятности попадания ***нормально распределенной*** случайной величины X на заданный интервал $(\alpha; \beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(t_1 < Z < t_2) = F(t_2) - F(t_1). \tag{1.4}$$

Для значений по аргументу $F(t)$ можно составить таблицы.

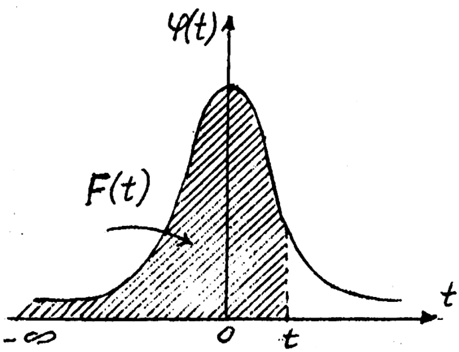

Рис. 1.2. Функция распределения

1.4 Интеграл вероятностей

Однако более удобной для табулирования является функция $\Phi(t)$, называемая интегралом вероятностей

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{\frac{-z^2}{2}} dz. \tag{1.5}$$

Численно функция $\Phi(t)$ равна заштрихованной площади на рис. 1.3 (в осях t и $\varphi(t)$). $\Phi(t)$ — функция нечётная, т.е. $\Phi(-t)=-\Phi(t)$, что позволяет объём таблиц для неё сократить вдвое по сравнению с таблицами для $F(t)$. В Приложении В приводится таблица значений функции $\Phi(t)$.

По графикам, представленным на рис. 1.2 и рис.1.3, можно установить соотношение между функцией распределения $F(t)$ и интегралом вероятностей $\Phi(t)$. Известно, что согласно 2-му свойству плотности вся площадь под кривой распределения в пределах существования случайной величины численно равна единице.

Заштрихованную на рис. 1.2 площадь, численно равную $F(t)$, мысленно разобьём на две части (от $-\infty$ до 0 и от 0 до t), одна из которых равна 0,5, а вторая — $0{,}5\Phi(t)$.

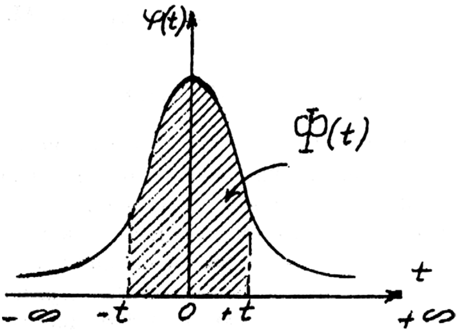

Рис. 1.3. Интеграл вероятностей

Получаем ***формулу связи функции распределения с интегралом вероятностей***:

$$F(t)=0{,}5+0{,}5\Phi(t). \qquad (1.6)$$

Тогда формула (1.4) с учётом (1.6) примет вид:

$$P(\alpha<X<\beta)=P(t_1<Z<t_2)= =0{,}5\,\{\Phi(t_2)-\Phi(t_1)\}. \qquad (1.7)$$

По формуле (1.7) и определяют вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X на заданный интервал $(\alpha;\ \beta)$. Известно, что ***выражение***

$$\Phi(t)=P(|X-M(x)|\leq t\sigma) \qquad (1.8)$$

позволяет выяснить смысл интеграла вероятностей: а именно — $\Phi(t)$ представляет собой вероятность попадания случайной величины X в интервал, симметричный относительно математического ожидания (в осях x и $\varphi(x)$).

Для случайных ошибок измерений выражение (1.8) примет вид:

$$\Phi(t)=P(|\Delta|\leq t\sigma) \qquad (1.8)$$

По таблице Приложения В для $t=2$ находим $\Phi(t=2)=0{,}95$, а для $t=3$ находим $\Phi(t=3)=0{,}997$.

Известно, что вероятности, равные 0,95 и 0,997, т.е. близкие к единице, соответствуют практически достоверным событиям. Вероятности, равные 0,05 и 0,003, соответствуют практически невозможным событиям.

На основании этих теоретических расчетов обычно устанавливают допуски в инструкциях, назначают предельные ошибки по правилу:

$$|\Delta_{пред.}|=2\sigma \quad (\text{или } |\Delta_{пред.}|=3\sigma).$$

Полагают, что результатов измерений, у которых ошибки превышают предельную, равную 2σ (или 3σ), не должно быть, так как они являются невозможными. Поэтому ошибки, $|\Delta|>2\sigma$ (или 3σ), считают грубыми, а измерения с такими ошибками бракуют и переделывают заново.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Законы распределения случайных величин и их числовые параметры устанавливаются на основе опыта, эксперимента. *Разработкой методов регистрации, описания и анализа экспериментальных данных занимается специальная наука* — ***математическая статистика***.

2.1 Основные понятия

Результаты наблюдений $x_1, x_2,..., x_n$, над случайной величиной X называют ***выборкой из генеральной совокупности*** *(из всех возможных значений случайной величины X)*.

При большом числе наблюдений выборку оформляют в виде ***статистического группированного ряда***: для этого весь диапазон значений x_i делится на интервалы, подсчитывается количество значений x_i, приходящееся на каждый интервал m_i, затем вычисляются частоты $Q_i=m_i/n$.

Составляют таблицу: статистический ряд распределения.

Таблица 2.1

Интервалы	x_1-x_2	x_2-x_3	…	x_i-x_{i+1}
M	m_1	m_2	…	m_i
Q	Q_1	Q_2	…	Q_i

Практика показывает, что число интервалов k должно быть порядка 10–20, а длины интервалов выбирают такими, чтобы величины m_i *были не менее 5*.

Статистический ряд графически оформляется в виде ***гистограммы*** (рис. 2.1).

Для этого по оси абсцисс откладывают интервалы, на которых строят прямоугольники, площади которых равны Q_i. Ясно, что $\sum_{i=1}^{k} Q_i = 1$. Высоты прямоугольников вычисляют по формуле

$$h_i = \frac{Q_i}{x_i - x_{i+1}}. \tag{2.1}$$

Аналогом функции распределения в теории вероятностей в математической статистике служит статистическая функция распределения

$$\text{F}^*(x)=Q(X<x) \tag{2.2}$$

2.2 Числовые характеристики

Статистические начальные и центральные моменты определяются по формулам:

$$\alpha_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}; \tag{2.3}$$

$$\mu_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M_X)^k}{n}. \tag{2.4}$$

Статистические математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение определяют соответственно по формулам:

$$M^*(X) = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \tag{2.5}$$

$$D^*(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}; \tag{2.6}$$

$$\sigma^*(x) = \sqrt{D^*(x)}. \tag{2.7}$$

2.3 Дополнительные характеристики разброса случайной величины

Кроме ***среднего квадратического отклонения*** $\sigma(X)$ иногда применяют другие характеристики разброса случайной величины: среднее и вероятное отклонения.

Среднее отклонение v_1 *— это центральный абсолютный момент первого порядка*

$$v_1=M(|X-M(X)|). \tag{2.8}$$

Вероятным отклонением *r называют величину, равную половине длины участка, симметрично расположенного относительно математического ожидания, вероятность попадания на который равна 0,5.*

Вероятное отклонение находят из условия:

$$P(|X-M(X)|<r)=0{,}5. \qquad (2.9)$$

Для нормального закона распределения случайной величины X имеют место ***следующие соотношения между характеристиками разброса случайной величины***:

$$v_1=0{,}80\sigma \text{ и } r=0{,}67\sigma. \qquad (2.10)$$

Выполнение этих соотношений свидетельствует о близости закона распределения исследуемого статистического ряда к нормальному закону распределения.

Формулы оценок параметров $v_1{*}$ и $r{*}$ будут приведены в параграфе «Критерии точности измерений».

2.4 Дополнительные характеристики формы кривой распределения: асимметрия и эксцесс

Нормированный центральный момент третьего порядка называют асимметрией ***(скошенностью)***

$$Sk=\mu_3/\sigma_x^3 \qquad (2.11)$$

а величина

$$E=\mu_4/\sigma_x^4-3 \qquad (2.12)$$

называется ***эксцессом*** *и является мерой крутости, т.е. островершинности или плосковершинности кривой распределения.*

Для кривой плотности нормального закона эти величины равны нулю: $Sk=0$, $E=0$.

Критериями нормального закона служат неравенства [1, стр. 84]:

$$|Sk{*}|\le 3\sigma_{Sk} \text{ и } |E{*}|\le 5\sigma_E. \qquad (2.13)$$

где

$$\sigma_{Sk}=\sqrt{\frac{6}{n}} \text{ и } \sigma_E=\sqrt{\frac{24}{n}}, \qquad (2.14)$$

Значительное отклонение величин $Sk{*}$ и $E{*}$ от нуля, т.е. невыполнение условий (2.13), означает отклонение исследуемого распределения случайной величины от нормального. (Формулы для вычисления оценок параметров $Sk{*}$ и $E{*}$ и будут приведены ниже)

2.5 Основные задачи математической статистики

Математическая статистика решает следующие задачи:

1. определение закона распределения случайной величины — задача сглаживания или выравнивания статистического ряда;

2. «задача проверки правдоподобия гипотез», тесно связанная с первой задачей, позволяет ответить на вопрос: хорошо ли согласуются результаты опыта с гипотезой о подобранном законе распределения вида $\varphi(x)$ (для ответа на этот вопрос служат «критерии согласия»);

3. задача об определении наилучших оценок неизвестных параметров, например, параметров M_x и D_x, и задача оценки точности этих оценок.

2.5.1 Определение закона распределения на основе опытных данных

Исследование распределения статистического ряда начинается с построения гистограммы (рис. 2.1). По виду гистограммы, а также исходя из соображений, связанных с существом задачи, делают предположение о виде теоретической кривой распределения. Если, например, исследуется ряд случайных ошибок измерений, то можно считать, что теоретической кривой является кривая нормального распределения вида (1.1). Тогда задача сводится к рациональному выбору параметров α и σ^2 в выражении (1.1).

Требование одного из *методов оценивания параметров* — ***«метода моментов»***, состоит в том, чтобы основные неизвестные параметры α и σ^2 были равны соответствующим статистическим характеристикам:

$$\alpha = M_X^* \text{ и } \alpha^2 = D_X^*,$$

определяемым по формулам ***статистических моментов*** (2.5) и (2.6).

Тогда уравнение кривой (1.1) принимает вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma_x^*\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-M_x^*)^2}{2\sigma_x^{*2}}}. \tag{2.15}$$

Выражение (2.15) обычно приводят к виду $\varphi(x) = \dfrac{y}{\sigma_x^*\sqrt{2}}$, (2.16)

где $y = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$

(2.17)

выбирают из таблиц Приложения А по аргументу $t = \dfrac{x - M_x^*}{\sigma_x^*}$.

Затем на графике гистограммы строится выравнивающая её теоретическая кривая по значениям x_i и $\varphi(x_i)$, вычисленным для левых границ интервалов x_i (см. таблицу 3.5.3).

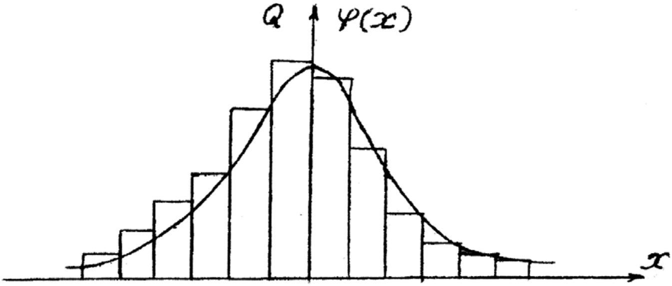

Рис. 2.1. Гистограмма и выравнивающая кривая

2.5.2 Критерий согласия Пирсона

В качестве меры расхождения между кривой и гистограммой К. Пирсон предложил вычислять величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_1}, \tag{2.18}$$

где m_i — практическое число значений x_i в i-м интервале; k — число интервалов; np_i — теоретическое число значений x_i, ожидаемое в i-м интервале при подобранном распределении $\varphi(x)$; p_i — теоретическая вероятность попадания в i-м интервал, определяемая, например, для нормального закона по формуле (1.7).

Величина χ^2 подчинена «хи-квадрат» распределению, зависящему от одного параметра r, называемого числом степеней свободы:

$$r = k - s - 1, \tag{2.19}$$

где k — число интервалов, s — число параметров, оцениваемых по выборке.

Степень согласованности теоретического и статистического распределений оценивается вероятностью P, полученной из таблиц Приложения Е по аргументу r и величине χ^2

Критическим значением вероятности считают P=0,1 [1, стр. 79].

Поэтому, если полученное из таблиц значение вероятности окажется меньше критического уровня значимости, т.е. $P(\chi^2)<0{,}1$, то делают вывод о том, что результаты опыта следует считать противоречащими гипотезе о предполагаемом законе распределения вида $\varphi(x)$.

2.5.3 Оценивание параметров. Методы оценивания параметров

При малом числе измерений нельзя решить задачу определения закона распределения, можно лишь найти оценки основных параметров M_X^* и D_X^* (приближённые значения неизвестных параметров M_X и D_X).

Оценкой a^* неизвестного параметра а называют любую функцию элементов выборки $x_1, x_2,..., x_n$.

Наилучшей (оптимальной) из всех возможных значений оценок называют такую оценку, для которой выполняются свойства:

1. ***состоятельности***, т.е. $\text{вер.}\lim\limits_{n\to\infty} a^* = a$; (2.20)

2. ***несмещённости***, т.е. $M(a^*)=a$; (2.21)

(невыполнение этого требования приводит к систематической ошибке в оценке параметра);

3. ***эффективности***, т.е. $D(a^*)=\min$ (2.22)

Последнее свойство означает выбор из всех оценок a^* оценки с минимальной дисперсией, т. е. наиболее точной оценки.

Можно показать, что, «наилучшей» оценкой для неизвестного математического M_X ожидания является среднее арифметическое, т.е. $M_X^* = \overline{x}$ (2.5).

Существует ***три метода оценивания параметров:***

1. метод моментов (рассмотрен на стр. 12);
2. метод максимального правдоподобия (см. учебник 2);
3. метод наименьших квадратов (подробно излагается во 2-й части курса).

2.5.4 доверительные интервалы и доверительная вероятность

Оценка неизвестного параметра одним числом, например, по формуле (2.5), *называется* ***точечной оценкой***.

Недостаток такой оценки состоит в том, что точечная оценка a^* является величиной случайной и не совпадает с точным значением параметра a, особенно при малом числе измерений.

Более совершенным является способ оценивания с помощью ***доверительных интервалов***. *В задачу интервального оценивания входит построение интервала, который с заранее выбранной доверительной вероятностью* β *накрывает неизвестное точное значение параметра*.

β — близкая к единице доверительная вероятность. В практических расчётах β принимается равной: 0,90÷0,95.

Так, доверительный интервал для неизвестного математического ожидания, при известном среднем квадратическом отклонении σ находят по формуле:

$$\overline{x} - t\sigma_{\overline{x}} < M(x) < \overline{x} + t\sigma_{\overline{x}}, \qquad (2.23)$$

$$\text{где} \quad \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \ \text{ и } \ \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \qquad (2.24)$$

Коэффициент t выбирается из таблиц интеграла вероятностей (Приложение B) по заданной вероятности $\beta = \Phi(t)$.

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания при *неизвестном* среднем квадратическом отклонении σ_x имеет следующий вид:

$$\overline{x} - t_\beta \sigma^*_{\overline{x}} < M(x) < \overline{x} + t_\beta \sigma^*_{\overline{x}}, \qquad (2.25)$$

$$\text{где } \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \ \sigma^*_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}; \ \sigma^*_{\overline{x}} = \frac{\sigma^*_x}{\sqrt{n}}. \qquad (2.26)$$

Коэффициент t_β определяют по заданной вероятности $\beta = \Phi'(t_\beta)$ и числу степеней свободы в таблице распределения Стьюдента (Приложение D).

Однако при большом числе измерений распределение Стьюдента приближается к нормальному закону распределения вероятностей. Поэтому при $n > 30$ и при *неизвестном* σ_x коэффициент t можно выбирать из таблиц интеграла вероятностей (Приложение B) по заданной вероятности $\beta = \Phi(t)$.

2.6 Элементы корреляционного анализа

2.6.1 Понятие о статистичеких связях

Существует две формы зависимости между величинами X и Y: функциональная и статистическая или вероятностная.

Функциональной зависимостью между двумя величинами X и Y называют такую зависимость, при которой каждым значениям X соответствуют значения Y, которые можно точно указать.

Статистической зависимостью между величинами X и Y называют такую зависимость, при которой каждому значению X соответствует *распределение* значений Y, изменяющееся вместе с изменением X.

Частным случаем статистической связи является ***прямолинейная корреляционная зависимость***, *при которой с изменением X изменяется математическое ожидание Y по линейному закону*.

2.6.2 Коэффициент корреляции

Теснота линейной корреляционной связи между двумя величинами X и Y (степень близости корреляционной связи к функциональной) характеризуется ***коэффициентом корреляции***

$$r = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{2.27}$$

($K_{xy}=\mu_{1,1}$ — ***корреляционный момент***, центральный смешанный момент второго порядка, важная числовая характеристика системы двух случайных величин).

Свойства коэффициента корреляции:

коэффициент корреляции изменяется в пределах: $-1 \le r \le +1$;

в случае, когда $r<0$, имеет место отрицательная корреляция;

при $r>0$ говорят о положительной корреляции;

если $r=\pm 1$, то имеет место функциональная прямолинейная связь;

если $r=0$, то между X и Y прямолинейная корреляционная связь отсутствует (однако другой вид связи может существовать)

Оценка коэффициента корреляции определяется по формуле

$$r^* = \frac{K^*_{xy}}{\sigma^*_x \sigma^*_y}, \tag{2.28}$$

где K^*_{xy} — ***статистический корреляционный момент.***

K^*_{xy}, σ^*_x, σ^*_y вычисляются по формулам:

$$K^*_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n}; \ \sigma^*_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}; \ \sigma^*_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n}}. \tag{2.29}$$

Для оценки надёжности коэффициента корреляции r^* при большом числе измерений ($n>50$) применяют ***критерий Романовского***:

связь считается установленной, если выполняется условие

$$\left| r^* \right| \ge 3\sigma^*_r, \tag{2.30}$$

где

$$\sigma^*_r = \frac{1 - r^{*^2}}{\sqrt{n}}. \tag{2.31}$$

Для оценки надёжности r^* при малом числе измерений ($n<50$) применяют ***критерий Фишера*** (см. задачу 2.2).

2.6.3 Уравнение регрессии

Если зависимость между величинами X и Y будет установлена и выражена формулой, то ее можно использовать для соответствующей организации измерений и обработки их результатов.

Уравнение линейной регрессии Y на X, отражающее прямолинейную корреляционную связь между переменными X и Y, имеет вид:

$$y_i - \overline{y} = \rho^*_{y/x}(x_i - \overline{x}), \tag{2.32}$$

где $\rho^*_{y/x}$ — коэффициент регрессии Y на X, вычисляемый по формуле

$$\rho^*_{y/x} = \frac{r^*\sigma^*_y}{\sigma^*_x}. \tag{2.33}$$

Задача 2.1 В табл. 2.2 приведены результаты измерений длин линий D_i (в км) и абсолютные значения ошибок Δ_i (в см), их сопровождающих.

Вычислить коэффициент корреляции; с вероятностью 0,90 оценить его надёжность и составить уравнение регрессии Δ на D.

1. Прежде чем решать задачу, прибегают к графическому изображению точек (D_i; Δ_i).

График на рис. 2.2 указывает на наличие корреляции между D и Δ.

Решение. Вычисление необходимых сумм, а также контроли вычислений поместим в табл. 2.2.

Таблица 2.2

№ п/п	D_i, км	Δ_i, см	δ_{D_i}	δ_{Δ_i}	$\delta^2_{D_i}$	$\delta^2_{\Delta_i}$	$\delta_{D_i}\delta_{\Delta_i}$	Примечания
1	8,7	6,8	+4,0	+3,0	16,00	9,00	+12,00	
2	3,7	3,1	–1,0	–0,7	01,00	0,49	0+0,70	1) $\overline{D} = 47,3/10 = 4,73$ км;
3	6,0	3,8	+1,3	–0,0	01,69	0,00	0+0,00	$\overline{D}_{\text{окр.}} = 4,7$ км;
4	3,3	2,9	–1,4	–0,9	01,96	0,81	0+1,26	$\beta_{\text{окр.}} = 4,7 - 4,73 = -0,03$ км.
5	5,1	4,1	+0,4	+0,3	00,16	0,09	0+0,12	2) $\overline{\Delta} = 37,9/10 = 3,79$ см;
6	6,1	3,7	+1,4	–0,1	01,96	0,01	0–0,14	$\overline{\Delta}_{\text{окр.}} = 3,8$ см; $\beta_{\text{окр.}} = +0,01$ см.
7	2,7	2,6	–2,0	–1,2	04,00	1,44	0+2,40	3) $\delta_{D_i} = D_i - \overline{D}_{\text{окр.}}$; $\delta_{\Delta_i} = \Delta_i - \overline{\Delta}_{\text{окр.}}$.
8	4,9	4,4	+0,2	+0,6	00,04	0,36	0+0,12	Контроли:
9	3,1	2,0	–1,6	–1,8	02,56	3,24	0+2,88	$\sum\delta_{D_i} = -\beta_{\text{окр.}}n = -(-0,03)\cdot 10 = +0,3$
10	3,7	4,5	–1,0	+0,7	01,00	0,49	0–0,70	
Σ	47,3	37,9	+0,3	–0,1	30,37	15,93	+18,64	$\sum\delta_{\Delta_i} = -\beta_{\text{окр.}}n = -0,01\cdot 10 = -0,1$. Контроли выполнены.

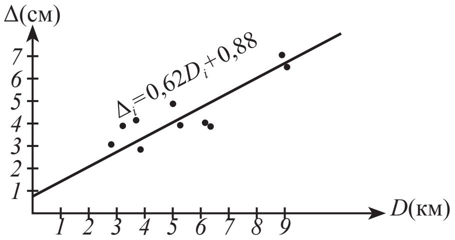

Рис. 2.2. Прямая регрессии

2. Вычисление r^* по формуле (2.28), которая в данной задаче примет вид:

$$r^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_{D_i} \delta_{\Delta_i}}{n\sigma_D^* \sigma_\Delta^*}; \qquad (2.34)$$

$$\sigma_D^* = \sqrt{\frac{30,37}{10}} = 1,74 \text{ км}; \ \sigma_\Delta^* = \sqrt{\frac{15,93}{10}} = 1,26 \text{ см}; \ r^* = \frac{+18,64}{10 \cdot 1,74 \cdot 1,26} = +0,85.$$

3. Оценка надёжности r^*.

Так как число измерений небольшое ($n=10$), то для оценки надёжности применим ***критерий Фишера***. Этот критерий основан на преобразовании вида:

$$Z^* = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |r^*|}{1 - |r^*|}. \qquad (2.35)$$

Величина Z^* подчинена нормальному закону распределения с параметрами $M(Z^*)=Z$ и $\sigma_Z^{*\,2}$. По таблице Приложения С, пользуясь коэффициентом корреляции r^*, как аргументом, находим $Z^*=1,256$. Доверительный интервал для истинного значения Z имеет вид:

$$Z^* - t\sigma_Z^* < Z < Z^* + t\sigma_Z^*. \qquad (2.36)$$

σ_Z^* определяем по формуле

$$\sigma_Z^* = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0,38. \qquad (2.37)$$

Для вероятности 0,90 по таблице Приложения В находим коэффициент $t=1,645$ и определяем границы доверительного интервала для Z:

$$1,256 - 1,645 \times 0,38 < Z < 1,256 + 1,645 \times 0,38;$$

$$0,631 < Z < 1,881.$$

Затем из таблицы Приложения С находим соответствующие крайним значениям Z(0,63; 1,881) значения границ коэффициента корреляции (0,56 и 0,95). Получаем доверительный интервал, с вероятностью 0,90 накрывающий истинное значение коэффициента корреляции r:

$$0,56 < r < 0,95.$$

Так как имеет место соотношение:

$|r_2 - r_1| < |r^*|$; $(0,95 - 0,56 = 0,39 < 0,85)$, то прямолинейную корреляционную связь между величинами D и Δ можно считать установленной.

4. Составим уравнение регрессии Δ на D: $\Delta_i - \overline{\Delta} = \rho^*_{y/x}(D_i - \overline{D})$, приведём его к виду: $\Delta_i = \rho^*_{y/x} D_i + (\overline{\Delta} - \rho^*_{y/x}\overline{D})$,

$$\text{где } \rho^*_{y/x} = \frac{0,85 \cdot 1,26}{1,74} = 0,62;$$

$$\Delta_i = 0,62 D_i + (3,8 - 0,62 \cdot 4,7).$$

Получаем окончательно уравнение регрессии Δ на D

$$\underline{\Delta_i = 0,62 D_i + 0,88.} \qquad (2.38)$$

Затем по уравнению (2.38) строим на графике рис. 2.2 прямую линию.

Достоинство *уравнения регрессии (2.38) состоит в том, что оно позволит по заданным значениям переменной D (в км) предвычислять ожидаемые в* ***среднем*** *значения переменной Δ (в см).*

3. ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Современная теория ошибок измерений базируется на теории вероятностей и математической статистике.

Однако теория ошибок измерений является самостоятельной инженерной дисциплиной и имеет свои специфические задачи и понятия.

3.1 Задачи теории ошибок

В теории ошибок измерений решают следующие задачи:

1. изучение причин возникновения ошибок измерений; изучение свойств ошибок измерений и исследование законов распределения их вероятностей;

2. определение наиболее надёжных значений искомых величин из результатов их многократных, независимых равноточных и неравноточных измерений;

3. оценка точности непосредственно выполненных результатов измерений и предвычисление ожидаемой точности функций измеренных величин;

4. установление допусков, т.е. критериев, ограничивающих использование результатов измерений в заданных пределах точности.

3.2 Классификация ошибок измерений

Ошибки измерений подразделяют на ***грубые, систематические и случайные***.

К ***грубым*** ошибкам относят ошибки, вызванные промахами и просчётами наблюдателя, неисправностями приборов, резким ухудшением внешних условий и др. С целью их обнаружения измерения выполняются многократно (не менее двух раз). Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, необходимо выявлять и исключать из обработки.

К ***систематическим*** относят ошибки, которые входят в результаты измерений по тому или иному закону, как функции источников возникновения систематических ошибок.

В практике геодезических измерений применяют следующие способы уменьшения влияния систематических ошибок:

1. устанавливают закон появления систематических ошибок, после чего ошибки уменьшают введением поправок в результаты измерений;
2. применяют соответствующую методику измерений для того, чтобы, например, односторонне действующие систематические ошибки изменяли знак на обратный;
3. используют определённую методику обработки результатов измерений.

Случайные ошибки являются наиболее ярким примером случайной величины. Их закономерности обнаруживаются только в массовом проявлении.

Случайные ошибки ***неизбежны*** при измерениях и не могут быть исключены из единичного измерения.

Влияние их можно лишь ослабить, повышая качество измерений, увеличивая число приемов измерений, а также применяя соответствующую математическую обработку результатов измерений.

Причин возникновения случайных ошибок измерений много : влияние внешних условий, неточности изготовления и юстировки приборов, неточности выполнения операций наблюдателем и т.д.

Очевидно, что случайные ошибки являются результатом суммирования большого числа независимых элементарных ошибок. На основании центральной предельной теоремы Ляпунова можно считать, что случайные ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения.

3.3 Свойства случайных ошибок измерений

1. Случайные ошибки по абсолютной величине с заданной вероятностью β не должны превышать определённого предела, равного $t \cdot m$.

2. Положительные и отрицательные случайные ошибки, равные по абсолютной величине, одинаково часто встречаются в ряде измерений.

3. Среднее арифметическое из значений случайных ошибок при неограниченном увеличении числа измерений стремится к нулю, т.е.

$$\text{вер.}\ \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=M(\Delta)=0. \tag{3.1}$$

Это свойство называют свойством компенсации. Отклонение $M(\Delta)$ от нуля свидетельствует о наличии в результатах измерений систематических ошибок.

4. Малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются в ряде измерений чаще, чем большие.

В классической теории ошибок измерений принимают следующие ***два постулата:***

1. считают, что при любых измерениях грубые ошибки отсутствуют, основная часть систематических ошибок исключена из результатов измерений, а остаточные систематические ошибки ничтожно малы, т.е. измерения сопровождаются только случайными ошибками $\Delta=x_i-X$ (где x_i — результат измерений, X — истинное значение измеряемой величины). Очевидно, что $M(\Delta)=0$, а $M(x)=X$;

2. полагают также, что случайные ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения с плотностью вида (1.1).

3.4 Критерии точности измерений

Основным критерием точности результатов измерений ***является средняя квадратическая ошибка m*** — оценка среднего квадратического отклонения, определяемая по формуле

$$m=\sigma^*(x)=\sqrt{D^*(x)}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-M_x)^2}{n}}. \tag{3.2}$$

Для ряда истинных ошибок $\{\Delta_i\}$ при известном истинном значении $X=M(x)$ формула (3.2) принимает вид (3.3) и называется ***формулой Гаусса:***

$$m=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}},$$

$$\text{где}\ \Delta_i=x_i-X;\ [\Delta^2]=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_n^2. \tag{3.3}$$

Средней ошибкой называют оценку среднего отклонения v_1 (центрального абсолютного момента первого порядка) и вычисляют по формуле:

$$\vartheta^* = \frac{\left[\left|\Delta\right|\right]}{n}. \qquad (3.4)\_$$

Вероятной ошибкой ϑ* называют оценку вероятного отклонения r. r* — это такое значение случайной ошибки Δ, больше или меньше которого, по абсолютной величине, ошибки являются равновозможными, т.е.

$$P(\left|\Delta\right| < r^*) = P(\left|\Delta\right| > r^*) = 0,5.$$

На практике r* определяется величиной, которую находят, расположив все ошибки Δ_i в ряд в порядке возрастания их абсолютных величин. Вероятная ошибка r* будет расположена в середине такого ряда.

При нормальном законе распределения случайных ошибок имеют место соотношения:

$$m = 1,25\vartheta^*;\ m = 1,48r^*. \qquad (3.5)$$

В параграфе 2.4. эти соотношения представлены формулами (2.10).

Предельной ошибкой $\Delta_{пред}$ называют такую ошибку, больше которой в ряде измерений ошибок не должно быть. В качестве предельных выбирают величины, определяемые по правилу :

$\Delta_{пред}=2m$ (для практических целей) и $\Delta_{пред}=3m$ (для исследовательских работ) (с вероятностями 0,954 и 0,997 соответственно).

Перечисленные выше критерии Δ_i, m, ϑ*, r*, $\Delta_{пред}$ называют ***абсолютными ошибками;*** значения абсолютных ошибок получают, как правило, с ***двумя – тремя значащими цифрами***,

Относительной ошибкой называют отношение соответствующей абсолютной ошибки к истинному значению измеряемой величины X (если X неизвестно, его заменяют результатом измерения x).

Относительную ошибку обычно выражают в виде дроби с числителем, равным 1, например:

$\frac{m}{x} = \frac{1}{N_1}$ — средняя квадратическая относительная ошибка;

$\frac{\Delta_{пред.}}{x} = \frac{1}{N_2}$ — предельная относительная ошибка величины X,

а знаменатель относительной ошибки округляют до двух значащих цифр с нулями.

Например, при $x = 145,68$ м и $m_x = 5,8$ см, $\frac{m_x}{x} = \frac{5,8}{14568} \approx \frac{1}{2500}$.

Основным среди перечисленных выше критериев является ***средняя квадратическая ошибка m***, так как этот критерий обладает следующими ***достоинствами:***

1. критерий m позволяет получить реальную характеристику точности результатов измерений (формула (3.3) лучше, чем, например, формула (3.4) учитывает большие по абсолютной величине ошибки);

2. критерий m определяется достаточно надежно даже при малом числе измерений (n=8–10). Точность этого критерия определяется по формуле:

$$m_m = m / \sqrt{(2n)}.$$

Считается, что если выполняется условие $m_m < 0{,}25\ m$, то величина m определена надежно;

3. критерий m связан с предельной ошибкой соотношением $\Delta_{\text{пред}} = 2m$, что позволяет исключать из обработки результаты измерений с грубыми ошибками.

3.5 Исследование ряда истинных ошибок на нормальное распределение

Для решения этой первой задачи теории ошибок используем методику, изложенную в разделе математической статистики, и применим для вычисления оценок параметров формулы (3.3–3.5) настоящего параграфа.

Задача 3.5.1. В табл. 3.5.1 даны невязки 32 х треугольников.

Невязки, $f = \sum \beta - 180^\circ$, можно считать истинными ошибками Δ, так как сумму углов в треугольнике можно рассматривать как измеренную величину, истинное значение которой равно 180°.

Выполнить исследование ряда невязок $\{\Delta_i\}$ на нормальный закон распределения.

Таблица 3.5.1

№	Невязки Δ_i	№	Невязки Δ_i	№	Невязки Δ_i	№	Невязки Δ_i
1	–0,76	9	+1,29	17	+0,71	25	+0,22
2	+1,52	10	+0,38	18	+1,04	26	+0,06
3	–0,24	11	–1,03	19	–0,38	27	+0,43
4	+1,31	12	+0,00	20	+1,16	28	–1,28
5	–1,27	13	–1,23	21	–0,19	29	–0,41
6	–1,88	14	–1,38	22	+2,28	30	–2,50
7	+0,01	15	–0,25	23	+0,07	31	+1,92
8	–0,69	16	–0,73	24	–0,95	32	–0,62

Найдём ряд сумм, необходимых для дальнейшего исследования:

$$[\Delta > 0] = +12,40;\ [\Delta < 0] = -15,79;\ [\Delta] = -3,39;\ \left[|\Delta|\right] = 28,19;$$

$$\left[\Delta^2\right] = 38,75;\ \left[\Delta^3\right] = (-34,41 + 30,03) = -4,38;\ \left[\Delta^4\right] = 120,70.$$

1. ***Вычисление оценок параметров нормального распределения M_Δ***, σ_Δ, кривая плотности которого определяется выражением (2.15):

$$M_\Delta^* = \frac{[\Delta]}{n} = \frac{-3,39}{32} = -0,106''^{\,*)},$$

$$\sigma_\Delta^* = m = \sqrt{\frac{\left[\Delta^2\right]}{n}} = \sqrt{\frac{38,75}{32}} = 1,10''.$$

2. ***Вычисление средней ошибки ϑ^* и коэффициента $k_{1\text{практ}}$***:

$$\vartheta^* = \frac{\left[|\Delta|\right]}{n}.\ \vartheta^* = 28,19/32 = 0,88'';$$

$$k_{1_{\text{практ.}}} = m/\vartheta^* = 1,10''/0,88'' = 1,25;\ k_{1_{\text{теор.}}} = 1,25.$$

3. ***Определение вероятной ошибки r^* и коэффициента $k_{2\text{практ}}$***.

Располагаем истинные ошибки в ряд по возрастанию их абсолютных величин:

+0,00; +0,01; +0,06;+0,07; –0,19; +0,22; –0,24; –0,25; +0,38; –0,38; –0,41; +0,43; –0,62; –0,69; +0,71; –0,73; –0,76; –0,95; –1,03; +1,04; +1,16; –1,23; –1,27; –1,28; +1,29; +1,31; –1,38; +1,52; –1,88; +1,92; +2,28; –2,50.

Находим:

$$r^* = \left(|\Delta|_{16} + |\Delta|_{17}\right)/2 = (0,73'' + 0,76'')/2 = 0,74'';$$

$$k_{2_{\text{практ.}}} = m/r^* = 1,10''/0,74'' = 1,49;\ k_{2_{\text{теор.}}} = 1,48.$$

4. ***Построение статистического группированного ряда.***

Распределим невязки (табл. 3.5.1) в двенадцати интервалах (длину интервала примем равной половине средней квадратической ошибки, т.е. $0,5m = 0,55''$), составим табл. 3.5.2.

---

*) Оценка математического ожидания M_Δ^* отличается от нуля. Применим для обнаружения постоянной систематической ошибки следующий критерий

$$\left|M_\Delta^*\right| \le t\sigma_\Delta^* / \sqrt{n}, \qquad [1,\ \text{стр.}95]$$

где t выбирается из таблиц Приложения В (при $n>30$) по вероятности $\beta = \Phi(t)$.

Находим для $\beta = 0,95 : t = 1,96$ и $t\sigma_\Delta^* / \sqrt{n} = 1,96 \times 1,10'' / \sqrt{32} = 0,38''$.

Как видно из результатов вычислений, критерий выполняется, так как имеет место неравенство $\left|M_\Delta^*\right| = 0,106'' < 0,38''$, следовательно, постоянной систематической ошибкой можно пренебречь и считать, что $\left|M_\Delta^*\right| = 0$.

Таблица 3.5.2

№ п/п	Длины интервалов в долях m		Длины интервалов в секундах $\Delta_i = t_i m$		Число ошибок m_i	Частоты $Q_i = m_i / n$	Высоты прямоугольников $h_i = Q_i / (0{,}5m)$
1	$-3{,}0\,m$	$-2{,}5\,m$	–3,30	–2,75	0	0,000	0,000
2	$-2{,}5\,m$	$-2{,}0\,m$	–2,75	–2,20	1	0,031	0,056
3	$-2{,}0\,m$	$-1{,}5\,m$	–2,20	–1,65	1	0,031	0,056
4	$-1{,}5\,m$	$-1{,}0\,m$	–1,65	–1,10	4	0,125	0,227
5	$-1{,}0\,m$	$-0{,}5\,m$	–1,10	–0,55	6	0,188	0,342
6	$-0{,}5m$	+0	–0,55	–0	5	0,156	0,284
7	+0	$+0{,}5\,m$	–0	+0,55	7	0,219	0,398
8	$+0{,}5\,m$	$+1{,}0\,m$	+0,55	+1,10	2	0,062	0,113
9	$+1{,}0\,m$	$+1{,}5\,m$	+1,10	+1,65	4	0,125	0,227
10	$+1{,}5\,m$	$+2{,}0\,m$	+1,65	+2,20	1	0,031	0,056
11	$+2{,}0\,m$	$+2{,}5\,m$	+2,20	+2,75	1	0,031	0,056
12	$+2{,}5\,m$	$+3{,}0\,m$	+2,75	+3,30	0	0,000	0,000
				$\sum$	32	1,000	—

В этой таблице m_i означает число ошибок, попавших в i-й интервал, которое подсчитывается непосредственно с учетом исходных данных табл. 3.5.1.

Если значение какой-то ошибки совпадает с границей интервала, то такую ошибку следует поместить в тот интервал, в котором теоретически ожидается большее число ошибок (см. рис 3.5.1)

5. ***Построение гистограммы и выравнивающей её кривой плотности нормального распределения.***

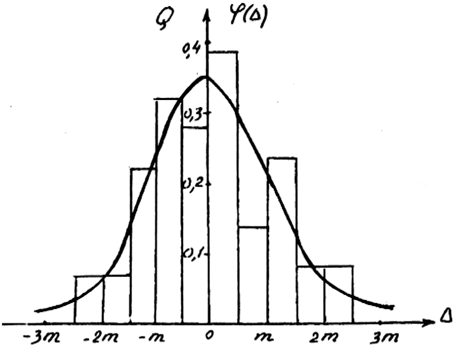

Рис. 3.5.1. Гистограмма и выравнивающая кривая

По данным табл. 3.5.2 (столбцы 2 и 6) строим гистограмму (рис. 3.5.1) — график эмпирического распределения (на выбор масштаба изображения наложим лишь условие наглядности).

Вид гистограммы позволяет действительно предположить нормальный закон распределения ошибок Δ_i.

Теоретическая кривая, наилучшим образом выравнивающая (сглаживающая) гистограмму, определяется уравнением

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\Delta^2}{2m^2}} = hy,$$

где $m = \sigma_\Delta^* = 1{,}10''; \; M^*(\Delta) \approx 0;$

$$t = \frac{\Delta}{m}; \; h = \frac{1}{m\sqrt{2}}; \; y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}. \tag{3.6}$$

Вычисление ординат кривой $\varphi(\Delta)$ выполняем, используя таблицу Приложения А. Результаты вычислений поместим в табл. 3.5.3.

Таблица 3.5.3

№ п/п	Левые границы интервалов Δ_i	$t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	y_i	$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$	$\varphi(\Delta_i) = hy_i$
1	0	0	0,564	0,645	0,364
2	0,5m	0,5	0,498	—″—	0,321
3	1,0m	1,0	0,342	—″—	0,220
4	1,5m	1,5	0,183	—″—	0,118
5	2,0m	2,0	0,076	—″—	0,049
6	2,5m	2,5	0,025	—″—	0,016
7	3,0m	3,0	0,006	—″—	0,004

По данным табл. 3.5.3 (столбцы 2 и 6) на графике рис. 3.5.1 наносим ряд точек (Δ_i; $\varphi(\Delta_i)$), которые соединяем плавной кривой. Левую ветвь кривой строим по тем же ординатам.

Как видно из графика, кривая $\varphi(\Delta)$ удовлетворительно сглаживает гистограмму.

6. ***Применение критерия χ^2–Пирсона.***

Для оценки степени приближения теоретического закона (кривой плотности нормального распределения) к статистическому распределению (гистограмме) вычисляем величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{3.7}$$

где

$$p_i = P(t_i < T < t_{i+1}) = 0{,}5\left\{\Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)\right\}. \tag{3.8}$$

Результаты вычислений по формулам (3.8) и (3.7) поместим в табл. 3.5.4.

В этой таблице значения величин $\Phi(t_i)$ находим из Приложения В для левых границ интервалов t_i.

Число степеней свободы определяем по формуле $r = k - s - 1$

(k — число интервалов, s — число параметров, оцениваемых по выборке). Находим: $r = 12 - 1 - 1 = 10$

($s = 1$, так как только один параметр $\sigma(\Delta)$ оценивался по выборке, а принято равным нулю).

Таблица 3.5.4

№ п/п	Интервалы t_i		$0{,}5\,\Phi(t_i)$	p_i	m_i	np_i	$\dfrac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	–3,0	–2,5	–0,5	0,0062	0	0,20	0,20
2	–2,5	–2,0	–0,4938	0,0166	1	0,53	0,42
3	–2,0	–1,5	–0,4772	0,0440	1	1,41	0,12
4	–1,5	–1,0	–0,4332	0,0918	4	2,94	0,38
5	–1,0	–0,5	–0,3414	0,1500	6	4,80	0,30
6	–0,5	+0	–0,1914	0,1914	5	6,12	0,20
7	+0	+0,5	+0	0,1914	7	6,12	0,13
8	+0,5	+1,0	+0,1914	0,1500	2	4,80	1,63
9	+1,0	+1,5	+0,3414	0,0918	4	2,94	0,38
10	+1,5	+2,0	+0,4332	0,0440	1	1,41	0,12
11	+2,0	+2,5	+0,4772	0,0166	1	0,53	0,42
12	+2,5	+3,0	+0,4938	0,0062	0	0,20	0,20
13	+3,0	+∞	+0,5	—	—	—	—
			Σ	1,0000	32	32,00	4,50

Определив по формуле (3.7) $\chi^2_{\text{выч.}} = 4{,}5$, находим из таблицы Приложения Е по числу степеней свободы $r = 10$ для $\chi^2 = 4$ вероятность $P = 0{,}947$, а для $\chi^2 = 5$ находим вероятность $P = 0{,}815$. Интерполируя, окончательно получаем вероятность $P(\chi^2 = 4{,}5) = 0{,}914$.

7. ***Вычисление оценок скошенности Sk* и эксцесса E****

$$Sk^* = \mu^*_3/(\sigma^*)^3; \quad E^* = \mu^*_4/(\sigma^*)^4 - 3 \tag{3.9}$$

и проверка соотношений (3.10)) [1, стр.81], которые являются ***критериями нормального закона:***

$$\left|Sk^*\right| \le 3\sigma_{Sk}; \; \left|E^*\right| \le 5\sigma_E, \tag{3.10}$$

Находим:

$$1.\ \mu_3^* = \left[\Delta^3\right]/n = -4{,}38/32 = -0{,}137;\ 2.\ Sk^* = \mu_3^*/(\sigma_\Delta^*)^3 = -0{,}137/(1{,}10)^3 = -0{,}103;$$

$$3.\ \mu_4^* = \left[\Delta^4\right]/n = 120{,}7/32 = 3{,}77;\ 4.\ E^* = \mu_4^*/(\sigma_\Delta^*)^4 - 3 = 3{,}77/(1{,}10)^4 - 3 = -0{,}42;$$

$$5.\ \sigma_{Sk} = \sqrt{6/n} = 0{,}43;\ \sigma_E = \sqrt{\frac{24}{n}},\ \sigma_E = 0{,}86.$$

Как видно из вычислений, соотношения (3.10) выполняются.

В результате исследования приходим к выводу о том, что рассматриваемый ряд истинных ошибок Δ является действительно рядом ***случайных ошибок***, подчиняющихся приближенно ***нормальному закону***, так как:

1. для данного ряда выполняются свойства ***случайных ошибок***:

а) среднее арифметическое $M^*(\Delta)$ практически равно нулю (это означает отсутствие систематических ошибок в результатах измерений);

б) положительные и отрицательные ошибки Δ, равные по абсолютной величине, примерно одинаково часто встречаются в данном ряде (см. гистограмму);

в) малые по абсолютной величине ошибки Δ встречаются чаще, чем большие (см. гистограмму);

г) случайные ошибки Δ с заданной вероятностью β не превосходят определенного предела, равного $t \cdot m$. В данном ряде нет ни одной ошибки, превышающей предельную ошибку, равную $\Delta_{\text{пред.}} = 3m = 3{,}30''$;

2. коэффициенты $k_{1\text{практ.}}$ и $k_{2\text{практ.}}$ совпадают с их теоретическими значениями (k_1=1,25; k_2=1,48);

3. вероятность $P(\chi^2) = 0{,}91$ велика, так как значительно больше критического уровня значимости, равного 0,1 [1, стр. 79];

4. Величины Sk^* скошенности и эксцесса незначительно отличаются от нуля.

3.6 Оценка точности функций измеренных величин

В геодезии часто искомые величины измерить непосредственно не представляется возможным, эти искомые величины находят в результате вычислений, как функции измеренных величин (аргументов).

Одной из важнейших задач теории ошибок является оценка точности функций измеренных величин. Очевидно, что средняя квадратическая ошибка функции будет зависеть как от ошибок измерения аргументов, так и от вида функции.

3.6.1 Средняя квадратическая ошибка функции

Пусть дана функция $y=f(x_1, x_2,..., x_n)$, (3.11)
где аргументы x_1, x_2,..., x_n измерены некоррелированно. Известны их средние квадратические ошибки m_{x1}, m_{x2},..., m_{xn}.

Средняя квадратическая ошибка функции (3.11) вычисляется по формуле:

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2 . \quad (3.12)$$

Если результаты измерений величин x_1, x_2,..., x_n коррелированы, т.е. коэффициенты попарной корреляционной связи отличны от нуля, $r_{xj}\neq 0$, то средняя квадратическая ошибка функции вычисляется по формуле:

$$m_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 r_{x_i x_j} m_{x_i} m_{x_j} . \quad (3.13)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ — частные производные функции, взятые по точным значениям величин X_i, но вычисленные по их приближённым значениям, в качестве которых принимают измеренные значения x_i, близкие к их точным значениям.

Предрасчёт ожидаемой средней квадратической ошибки функции по формулам (3.12) и (3.13) называют решением прямой задачи теории ошибок.

Задача 3.6.1

В треугольнике измерены два угла, известны их средние квадратические ошибки $m_{x1}=3{,}0''$, $m_{x2}=4{,}0''$. Найти среднюю квадратическую ошибку третьего угла, вычисленного по двум измеренным.

Решение. Составляем функцию $y=180°-x_1-x_2$;
180° — постоянное число; x_1 и x_2 — независимо измеренные аргументы.

Находим частные производные: $\frac{\partial y}{\partial x_1} = -1;\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = -1;$

Применяя формулу (3.12), находим:

$$m_y^2 = (-1)^2 \times 3^2 + (-1)^2 \times 4^2 = 25;\ m_y = 5''.$$

Задача 3.6.2

Определить среднюю квадратическую ошибку превышения, вычисленного по формуле $h=S\operatorname{tg}v$,

где S — горизонтальное проложение, v — угол наклона.

Известно, что $S = 143{,}5$ м; $\nu = +2^\circ 30'$; $m_S = 0{,}5$ м; $m_\nu = 0{,}5'$ $\rho' = 3438' = 3{,}44 \times 10^3$.

Решение. Находим превышение $h = S \operatorname{tg} \nu = 6{,}2653$ м
и по формуле (3.12) его среднюю квадратическую ошибку m_h:

$$m_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \nu}\right)^2 m_\nu^{2*)}, \text{ где } \frac{\partial h}{\partial S} = \operatorname{tg}\nu; \ \frac{\partial h}{\partial \nu} = \frac{S}{\cos^2 \nu}.$$

Тогда $m_h^2 = \operatorname{tg}^2 \nu \cdot m_S^2 + \left(\dfrac{S}{\cos^2 \nu}\right)^2 \dfrac{m_\nu^2}{\rho^2}$,

где $\operatorname{tg}^2 \nu = 0{,}04366^2$; $\cos^4 \nu = 0{,}9990^4$; $S^2 = 143{,}5^2$ м^2; $\rho^2 = 3438^2$.

Приведем следующие практические рекомендации для вычислений по формуле (3.12).

Известно, что величина $\boldsymbol{m_h}$ должна быть получена с ***двумя*** (или тремя, если число начинается с единицы) ***значащими цифрами***.

Чтобы это ***требование*** обеспечить, необходимо в промежуточных вычислениях по формуле (3.12) удерживать в числах на одну значащую цифру больше, т.е. оставлять ***три*** (или ***четыре***) значащие цифры, а сами числа следует представлять в стандартной форме:

например, число $0{,}04366^2$ необходимо записать так: $4{,}37^2 \times 10^{-4}$; число 3438^2 следует записать так $3{,}44^2 \times 10^6$; число $143{,}5^2$ можно записать так $14{,}35^2 \times 10^2$, или $1{,}435^2 \times 10^4$.

Такие действия позволяют оперировать с разумным количеством значащих цифр в числах, позволяют упростить вычисления по формуле (3.12) и, кроме того, дадут возможность получить представление о величине влияния каждого источника ошибок на общую среднюю квадратическую ошибку функции. С учётом сказанного выше находим:

$$m_h^2 = 4{,}37^2 \times 10^{-4} \times 0{,}25 + \frac{14{,}35^2 \times 10^2}{0{,}999^4} \times \frac{0{,}5^2}{3{,}44^2 \times 10^6} =$$

$$= 4{,}77 \times 10^{-4} + 4{,}37 \times 10^{-4} = 9{,}14 \times 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По результатам вычислений видно, ***что влияние линейных и угловых*** ошибок измерений на общую ошибку функции в данной задаче ***примерно одинаково***.

Окончательно получаем: $m_h = 3{,}0 \times 10^{-2}$ м $= 3{,}0$ см.

Ответ: $h \pm m_h = 6{,}27 \text{ м} \pm 0{,}03 \text{ м}$.

---

*) Для того чтобы оба слагаемых в этом выражении имели одинаковую размерность (в м^2), необходимо во втором слагаемом величину m_ν^2 разделить на ρ^2 (т.е. выразить m в радианной мере).

3.6.2 Обратная задача теории ошибок

Для решения обратной задачи теории ошибок *— расчёте точности измерений аргументов по заданной средней квадратической ошибке функции — применяют так называемый* ***«принцип равных влияний»****. Требование этого принципа состоит в том, чтобы влияние каждого источника ошибок на общую ошибку функции было одинаковым.*

Так, с учетом формулы (3.12) согласно ***«принципу равных влияний»*** получаем следующую систему уравнений:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2 = \frac{m_y^2}{n}. \tag{3.14}$$

Из уравнений (3.14) находят по формулам (3.15) все величины m_{x_i}

$$m_{x_i} = \frac{m_y}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right|\sqrt{n}}. \tag{3.15}$$

Задачи для контроля: Найти средние квадратические ошибки следующих функций независимо измеренных величин:

1. $y = 5x_1$; 2. $y = x_1 x_2$; 3. $y = \frac{x_1 x_2}{x_3}$; 4. $y = \operatorname{tg}\frac{x_1}{x_2}$; 5. $y = \sin kx_1 + \cos x_2$.

3.7 Равноточные измерения

Равноточными называют измерения, выполненные одним и тем же прибором, одним и тем же методом, одинаковым числом приёмов и в примерно одинаковых условиях.

Равноточные измерения характеризуются одинаковой для всех результатов измерений средней квадратической ошибкой.

3.7.1 Математическая обработка ряда многократных независимых равноточных измерений одной величины

Пусть выполнен ряд многократных, независимых равноточных измерений одной величины, истинное значение X которой неизвестно. В результате измерений получены значения x_i, свободные от систематических ошибок (это означает, что $M(x)=X$).

Под математической обработкой ряда равноточных измерений, которая выполняется с использованием для оценивания основных параметров метода максимального правдоподобия, изложенного в [2], понимают:

1. определение наиболее надёжного значения измеряемой величины (наилучшей оценки неизвестного истинного значения X) — ***простой арифметической средины:***

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \qquad (3.16)$$

где x_0 — наименьшее значение из ряда $\{x_i\}$, $\varepsilon_i = x_i - x_i$;

2. определение средней квадратической ошибки отдельного результата измерений по ***формуле Бесселя*** (оценка неизвестного параметра σ_x):

$$m = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{n-1}}, \qquad (3.17)$$

где $\upsilon_i = x_i - \bar{x}$ — уклонения от арифметической средины, которые обладают свойствами:

$$\text{а) } [\upsilon] = 0, \quad \text{б) } [\upsilon^2] = \min.$$

3. определение средней квадратической ошибки простой арифметической средины:

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (3.18)$$

4. построение доверительного интервала, с заданной вероятностью β накрывающего неизвестное истинное значение X:

$$\bar{x} - t_\beta M < X < \bar{x} + t_\beta M. \qquad (3.19)$$

3.7.2 Порядок обработки ряда равноточных измерений одной величины

Задача 3.7.1. Даны результаты равноточных, независимых многократных измерений одного и того же угла. Определить: $\bar{x}$, m, M_m, m_M.

Построить доверительный интервал, с вероятностью 0,90 накрывающий истинное значение угла. Составим таблицу.

1. Вычисление среднего арифметического

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n} = 67°33'40'' + \frac{56''}{12} = 67°33'44,67''.$$

В качестве наиболее надёжного значения принимаем среднее арифметическое, округлённое до десятых долей секунды

$$\bar{x}_{\text{окр.}} = 67°33'44,7''.$$

2. Вычисление уклонений $\upsilon_i = x_i - \bar{x}_{\text{окр.}}$, а также сумм $[\upsilon]$, $[\upsilon^2]$,$[\varepsilon^2]$ непосредственно в табл. 3.7.1 и по контрольным формулам:

$$[\upsilon] = -n\Delta_{\text{окр.}}, \quad [\upsilon^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}. \qquad (3.20)$$

Т а б л и ц а 3 . 7 . 1

№ п.п.	Результаты измерений x_i	ε_i	ε_i^2	υ_i	υ_i^2	Примечания
1	67°33′44″	+4	16	–0,7	0,49	$\Delta_{\text{окр.}} = \bar{x}_{\text{окр.}} - \bar{x} = +0,03''$ Контроли: а) $[\upsilon] = -12 \times 0,03'' = -0,4''$; б) $[\upsilon^2] = 334 - \frac{56^2}{12} = 72,7.$
2	40″	+0	0	–4,7	22,1	
3	43″	+3	9	–1,7	2,89	
4	45″	+5	25	+0.3	0,09	
5	46″	+6	36	+1,3	1,69	
6	43″	+3	9	–1,7	2,89	
7	48″	+8	64	+3,3	10,9	
8	45″	+5	25	+0,3	0,09	
9	48″	+8	64	+3,3	10,9	
10	46″	+6	36	+1,3	1,69	
11	47″	+7	49	+2,3	5,29	
12	41″	+1	1	–3,7	13,7	
	Σ	+56	334	–0,4	72,72	

Расхождение между суммой $[\upsilon^2]$, которую получили непосредственно в таблице, и её контрольным значением допускается в пределах (2–3)% от величины $[\upsilon^2]$. Как видно из результатов вычислений (см. примечания в табл. 3.7.1), контроли выполнены.

Вычисление средней квадратической ошибки отдельного результата измерений по формуле Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{72,7}{11}} = 2,6''.$$

3. Вычисление средней квадратической ошибки наиболее надёжного значения измеряемого угла:

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{2,6''}{\sqrt{12}} = 0,75''.$$

Оценим точность полученных значений m и M по формулам:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2,6''}{\sqrt{22}} = 0,55'',$$

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = 0,15''. \qquad (3.21)$$

4. Построим доверительный интервал для истинного значения измеряемого угла.

Для вероятности $\beta = \Phi'(t_\beta) = 0,90$ и числа степеней свободы r=11 (r=n–1) по таблице Стьюдента (Приложение D) находим коэффициент t_β=1,8, а затем по формуле (2.25) вычисляем границы интервала:

$$\overline{x}_{\text{окр.}} - t_\beta M < X < \overline{x}_{\text{окр.}} + t_\beta M,$$

$$67°33'44,7'' - 1,8 \times 0,75'' < X < 67°33'44,7'' + 1,8 \times 0,75'',$$

$$67°33'43,3'' < X < 67°33'46,1''.$$

Ответ: интервал с доверительной вероятностью 0,90 накрывает истинное значение угла. В сокращённой форме ответ имеет вид:

$$\overline{x} \pm M = 67°33'44,7'' \pm 0,8''.$$

3.8 Неравноточные измерения

Неравноточными называют измерения, которые имеют различные дисперсии. Это имеет место, когда измерения производят в различных условиях, по разной методике, с помощью различных приборов.

Для совместной обработки неравноточных измерений вводят веса.

3.8.1 Общие сведения о весах

Весом называется величина, обратно пропорциональная дисперсии

$$p_i = \frac{c}{\sigma_i^2}. \qquad (3.22)$$

Значение с постоянно для всех измерений и выбирается произвольно.

При p=1 $c = \sigma_i^2 = \sigma_0^2$ и формула веса принимает вид

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \qquad (3.23)$$

где σ_0^2 — дисперсия такого измерения, вес которого равен единице.

Дисперсии результатов измерений σ_i^2, как правило, неизвестны. Заменяя неизвестные дисперсии их оценками, т.е. квадратами средних квадратических ошибок, получаем следующие приближенные формулы веса

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}, \qquad (3.24)$$

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \qquad (3.25)$$

где μ — средняя квадратическая ошибка измерения, вес которого равен единице (сокращённо μ называют ошибкой единицы веса).

При вычислении весов ***однородных*** (или углов, или линий) результатов измерений по формулам (3.24) и (3.25) размерность $c = \sigma_0^2$ (или μ^2) принимают равной размерности σ_i^2 (или m_i^2).

В этом случае ***веса*** являются величинами ***безразмерными***.

Одной из причин введения весов является возможность установить их, и не зная величин m_i. и μ.

Так, пользуясь произвольностью выбора μ в формуле (3.25) для нивелирной сети получают следующую формулу веса

$$p_i = \frac{c}{L_i}, \tag{3.26}$$

(где L_i — число км в длине i го хода, которое определяют приближенно по схеме нивелирной сети).

Приведем еще одну полезную формулу.

Зная среднюю квадратическую ошибку измерения с весом, равным единице, и вес i-го измерения, можно вычислить среднюю квадратическую ошибку i-го измерения:

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}. \tag{3.27}$$

Задача 3.8.1. Вес угла равен 9. Найти среднюю квадратическую ошибку этого угла, если ошибка единицы веса равна 15″.

Решение. Находим среднюю квадратическую ошибку угла

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \quad m_i = \frac{15''}{\sqrt{9}} = 5''.$$

3.8.2 Обратный вес функции общего вида

Пусть дана функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ измеренных аргументов. Измерения выполнены некоррелированно, известны их веса $p_{x_1}, p_{x_2}, \ldots, p_{x_n}$.

Используя формулы (3.12) и (3.24), получаем следующую формулу для вычисления обратного веса функции:

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_1}} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_2}} + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_n}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_i}}. \tag{3.28}$$

Если измерения величин коррелированы, т.е. коэффициенты попарной корреляционной связи отличны от нуля, , то обратный вес функции вычисляется по формуле:

$$\frac{1}{p_y}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_0^2\frac{1}{p_{x_i}}+2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_0\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)_0\frac{r_{x_i x_j}}{\sqrt{p_{x_i}p_{x_j}}}. \qquad (3.29)$$

Задача 3.8.2. Найти веса следующих функций:

$$1.\ y=2x_1-0,4x_2+0,5x_3;\quad 2.\ y=3x_1^2;$$

если $p_{x_1}=2;\quad p_{x_2}=0,2;\quad p_{x_3}=0,5;\quad x_1=1, r_{x_i x_j}=0.$

Решение:

$$1.\ \frac{1}{p_y}=2^2\frac{1}{p_{x_1}}+(-0,4)^2\frac{1}{p_{x_2}}+(0,5)^2\frac{1}{p_{x_3}}=3,3;\quad p_y=\frac{1}{3,3}=0,30;$$

$$2.\ \frac{1}{p_y}=(6x_1)^2\frac{1}{p_{x_1}}=18;\quad p_y=\frac{1}{18}=0,06.$$

3.8.3 Математическая обработка ряда независимых многократных неравноточных измерений

Пусть имеется ряд многократных, независимых неравноточных измерений одной и той же величины: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, истинное значение X которой неизвестно. Известны веса результатов измерений: $p_{x_1}, p_{x_2}, \ldots, p_{x_n}$.

Под математической обработкой ряда неравноточных измерений понимают:

1. определение наиболее надёжного значения измеряемой величины — среднего весового, или общей арифметической средины (наилучшей оценки неизвестного истинного значения):

$$\overline{x}=\frac{[px]}{[p]}=x_0+\frac{[p\varepsilon]}{[p]}, \qquad (3.30)$$

где x_0 — наименьшее значение из ряда $\{x_i\}$, а $\varepsilon_i=x_i-x_0$.

2. определение по ***формуле Бесселя*** средней квадратической ошибки измерения с весом, равным единице (оценки параметра σ_0):

$$\mu=\sqrt{\frac{\left[p\upsilon^2\right]}{n-1}}, \qquad (3.31)$$

где $\upsilon_i=x_i-\overline{x}$ — уклонения от среднего весового, которые обладают свойствами:

$$\text{а) } [p\upsilon]=0,\quad \text{б) } \left[p\upsilon^2\right]=\min.$$

3. определение средней квадратической ошибки наиболее надёжного значения

$$m_{\overline{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\overline{x}}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \tag{3.32}$$

4. построение доверительного интервала, с заданной вероятностью β накрывающего неизвестное истинное значение X

$$\overline{x} - t_{\beta} M < X < \overline{x} + t_{\beta} M. \tag{3.33}$$

3.8.4 Порядок обработки ряда неравноточных измерений

Задача 3.8.3. Отметка узлового репера получена по шести ходам, известны средние квадратические ошибки определения отметки по каждому ходу m_i (в мм). Найти наиболее надёжное значение отметки репера и произвести оценку точности.

Таблица 3.8.1

№	H_i (м)	H_i (мм)	$p_i = \frac{c}{m_i^2}$	ε_i (мм)	$\rho_i \varepsilon_i$	$\rho_i \varepsilon_i^2$	υ_i (мм)	$\rho_i \upsilon_i$	$\rho_i \upsilon_i^2$
1	196,529	6,3	0,25	+12	+3,00	+36,0	+1	+0,25	00,2
2	,522	8,4	0,14	+5	+0,70	++3,5	–6	–0,84	05,0
3	,517	9,1	0,12	+0	+0	++0	–11	–1,32	14,5
4	,532	4,3	0,54	+15	+8,10	121,5	+4	+2,16	08,6
5	,530	5,2	0,37	+13	+4,81	+62,5	+2	+0,74	01,5
6	,520	7,5	0,18	+3	+0,54	++1,6	–8	–1,44	11,5
Σ			1,60		17,15	225,1		–0,45	41,3

Решение:

Веса вычисляем по формуле $p_i = c/m_i^{2}$ *), примем c=10.

1. Вычисление наиболее надёжного значения отметки репера:

$$\overline{x} = x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 196{,}517\,\text{м} + \frac{17{,}15\,\text{мм}}{1{,}60} = 196{,}5277\,\text{м},$$

$$\overline{x}_{\text{окр.}} = 196{,}528\,\text{м}, \quad \Delta_{\text{окр.}} = \overline{x}_{\text{окр.}} - \overline{x} = +0{,}3\,\text{мм}.$$

Вычисление уклонений от среднего весового $\upsilon_i = x_i - \overline{x}_{\text{окр.}}$, а также сумм $\left[p\varepsilon^2\right]$, $[p\upsilon]$, $\left[p\upsilon^2\right]$ непосредственно в табл. 3.8.1.

*) Веса принято вычислять с двумя–тремя значащими цифрами.

Контроли вычислений:

а) $[p\upsilon] = -\Delta_{\text{окр.}}[p]$; $\quad [p\upsilon] = -0,3 \times 1,60 = -0,48$;

б) $\left[p\upsilon^2\right] = \left[p\varepsilon^2\right] - \dfrac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$; $\quad \left[p\upsilon^2\right] = 225,1 - \dfrac{17,15^2}{1,60} = 41,3.$

Контроли выполнены.

1. Вычисление средней квадратической ошибки измерения с весом, равным единице

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[p\upsilon^2\right]}{n-1}} = \sqrt{\frac{41,3}{5}} = 2,9\,\text{мм}.$$

2. Вычисление средней квадратической ошибки наиболее надёжного значения отметки репера:

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{2,9}{\sqrt{1,6}} = 2,3\,\text{мм}.$$

Оценим надёжность определения μ и $m_{\bar{x}}$:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = 0,92\,\text{мм};$$

$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{0,92}{\sqrt{1,6}} = 0,73\ \text{мм}.$$

Ответ: $\bar{x} \pm m_{\bar{x}} = 196,528\,\text{м} \pm 2,3\,\text{мм}.$

3.9. Оценка точности по разностям двойных измерений

В геодезии часто приходится измерять большие группы однородных величин, причём каждую величину для обеспечения контроля измеряют не менее двух раз.

Двойные измерения в ряде случаев представляют собой единственную информацию, по которой необходимо выполнить оценку точности.

3.9.1 Двойные равноточные измерения

Пусть однородные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ измерены равноточно, дважды и получены результаты измерений:

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'$$
$$x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$$

Требуется выполнить математическую обработку ряда двойных измерений.

Наиболее надёжные значения определяемых величин находим по формуле:

$$\overline{x}_i = \frac{x_i' + x_i''}{2}. \qquad (3.34)$$

Для оценки точности выполненных измерений используем разности, составленные по формуле

$$d_i = x_i' - x_i''. \qquad (3.35)$$

Рассмотрим два случая оценки точности:

а) в результатах отсутствуют систематические ошибки;

б) в результатах обнаружены систематические ошибки.

а) При отсутствии систематических ошибок разности d_i можно рассматривать как истинные ошибки самих разностей (так как истинное значение разностей равно нулю $M(d)=0$).

Применяя к ряду $\{d_i\}$ формулу Гаусса (3.3), находим:

$$m_d = \sqrt{\frac{\left[d^2\right]}{n}}. \qquad (3.36)$$

Применяя к выражению (3.35) формулу (3.12), и учитывая, что двойные измерения выполнены равноточно, получаем формулу для вычисления средней квадратической ошибки отдельного результата измерений:

$$m_{\overline{x}} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = 0,5\sqrt{\frac{\left[d^2\right]}{n}}. \qquad (3.37)$$

Тогда с учетом (3.18) средняя квадратическая ошибка наиболее надёжных значений измеряемых величин вычисляется по формуле:

$$m_{\overline{x}} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = 0,5\sqrt{\frac{\left[d^2\right]}{n}}. \qquad (3.38)$$

б) Если в результатах измерений присутствуют систематические ошибки, то величина

$$M^*(d) = \overline{d} = \frac{[d]}{n}. \qquad (3.39)$$

называемая остаточным влиянием систематических ошибок, существенно отличается от нуля.

В этом случае из каждой разности необходимо исключить остаточное влияние систематических ошибок, т. е. получить новые разности

$$d_i' = d_i - \overline{d}_{\text{окр.}} \qquad (3.40)$$

Рассматривая разности как уклонения от среднего $\overline{d}_{\text{окр.}}$ и применяя к этим разностям d_i' формулу Бесселя, находим

$$m_d = \sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{n-1}}. \tag{3.41}$$

Средние квадратические ошибки отдельного результата измерений и наиболее надёжных значений измеряемых величин находим по формулам:

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{2(n-1)}}, \tag{3.42}$$

$$m_{\overline{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = 0,5\sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{n-1}}. \tag{3.43}$$

Заметим, что в этом случае необходимо выполнить контроли вычислений по формулам:

$$1.\ \left[d'\right] = -n\Delta_{\text{окр.}}, \quad \text{где } \Delta_{\text{окр.}} = \overline{d}_{\text{окр.}} - \overline{d}; \quad 2.\ \left[d'^2\right] = \left[d^2\right] - \frac{\left[d\right]^2}{n}. \tag{3.44}$$

Для определения значимости отклонения $\overline{d}$ от нуля применяют неравенство

$$\left|\left[d\right]\right| \le 1,25 t_\beta \frac{\left[\left|d\right|\right]}{\sqrt{n}}, \tag{3.45}$$

где t_β выбирают из таблиц Стьюдента по заданной вероятности $\beta=\Phi'(t_\beta)$ и числу степеней свободы $r=n$, а при $n>30$ коэффициент t выбирают из таблиц интеграла вероятностей по заданной вероятности $\beta=\Phi(t)$.

Так, при $n>30$ для $\beta=\Phi(t)=0,95$ находим из таблицы Приложения В коэффициент $t=2$, и неравенство (3.45) принимает вид:

$$\left|\left[d\right]\right| \le 2,5 \frac{\left[\left|d\right|\right]}{\sqrt{n}}. \tag{3.46}$$

Иногда применяют более жёсткий критерий обнаружения систематических ошибок

$$\left|\left[d\right]\right| \le 0,25\left[\left|d\right|\right]. \tag{3.47}$$

Этот критерий получается, исходя из следующего требования : остаточное влияние систематических ошибок не должно превышать 20% от влияния случайных ошибок, т.е.

$$\overline{d} = \delta_{\text{сист.}} \le \frac{1}{5} m_d.$$

Оценку точности начинают с проверки условия (3.45) или (3.47). Если, например, неравенство (3.47) выполняется, то делают вывод о том, что систематическими ошибками можно пренебречь и оценку точности следует выполнять по формулам (3.37 – 3.38).

Если неравенство (3.47) не выполняется, то делают заключение о том, что систематическими ошибками пренебрегать нельзя, необходимо оценку точности выполнять по формулам (3.42 – 3.43).

3.9.2 Двойные неравноточные измерения

Пусть каждая из однородных величин $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ измерена дважды и независимо, причём измерения в каждой паре равноточны, а пары между собой неравноточны. Известны веса p_i результатов измерений. Получены разности d_i с весами $p_{d_i} = p_i / 2$.

Наиболее надёжные значения измеряемых величин находим по формуле (3.34).

Более жесткий критерий обнаружения систематических ошибок имеет вид:

$$\left| \left[d\sqrt{p} \right] \right| \le 0,25 \left[\left| d\sqrt{p} \right| \right]. \tag{3.48}$$

а) если неравенство (3.48) выполняется, то делают заключение о том, что систематическими ошибками можно пренебречь и оценку точности необходимо выполнять следующим образом:

1. определяют среднюю квадратическую ошибку измерения с весом, равным единице

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[pd^2 \right]}{2n}}. \tag{3.49}$$

2. находят средние квадратические ошибки наиболее надёжных значений измеряемых величин

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \tag{3.50}$$

б) Если условие (3.48) не выполняется, то делают вывод о том, что систематическими ошибками пренебрегать нельзя. Необходимо найти остаточное влияние систематических ошибок

$$\bar{d} = \frac{[pd]}{[p]} \tag{3.51}$$

и исключить его из каждой разности, получить новые разности, свободные от влияния систематических ошибок

$$d'_i = d_i - \overline{d}_{\text{окр.}}. \qquad (3.52)$$

Оценка точности выполняется следующим образом:

1. определяют среднюю квадратическую ошибку измерения с весом, равным единице, предварительно выполнив контроли вычислений по формулам (3.53):

$$\begin{aligned} &1.\ [pd'] = -\Delta_{\text{окр}}[p]; \\ &2.\ [pd'^2] = [pd^2] - [pd]^2/[p], \end{aligned} \qquad (3.53)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}. \qquad (3.54)$$

2. вычисляют средние квадратические ошибки наиболее надёжных значений

$$m_{x_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \qquad (3.55)$$

3.9.3 Порядок обработки двойных равноточных измерений ряда однородных величин

Задача 3.9.1. Одни и те же линии измерены дважды равноточно. Выполнить оценку точности по разностям двойных измерений.

Таблица 3.9.1

№	x'_i (м)	x''_i (м)	d_i (мм)	d_i^2	d'_i	d'^2_i
1	120,389	120,380	+9	81	+6,3	39,7
2	136,468	136,462	+6	36	+3,3	10,9
3	133,223	132,229	–6	36	–8,7	75,7
4	124,536	124,537	–1	1	–3,7	13,7
5	140,457	140,449	+8	64	+5,3	28,1
6	143,682	143,688	–6	36	–8,7	75,7
7	139,158	139,149	+9	81	+6,3	39,7
Σ				335	+0,1	283,5
$[(d>0)] = +32$ $[(d<0)] = -13$						
$[\lvert d\rvert] = 45$ $[d] = +19$						

Решение:

1. составим ряд разностей $d_i = x_i' - x_i''$.

2. согласно критерию обнаружения систематических ошибок (3.47) вычисляем левую и правую части этого неравенства:

$$\left|[d]\right| = 19; \quad 0,25\left[|d|\right] = 0,25 \times 45 = 11,2.$$

Вывод: левая часть неравенства (3.47) оказалась больше его правой части, следовательно, систематическими ошибками пренебрегать нельзя.

3. находим остаточное влияние систематических ошибок:

$$\bar{d} = \frac{[d]}{n} = \frac{+19}{7} = +2,71\text{мм}; \quad \bar{d}_{\text{окр.}} = +2,7\,\text{мм},$$

затем исключаем его из каждой разности, находим новые разности и вычисляем суммы $\left[d^2\right]$, $[d']$, $\left[d'^2\right]$ непосредственно в табл. 3.7.1. Выполняем контроли вычислений по формулам (3.44):

1. $[d'] = -n\Delta_{\text{окр.}}$: $\Delta_{\text{окр.}} = \bar{d}_{\text{окр.}} - \bar{d} = -0,01\text{мм}$, $[d'] = -7 \times (-0,01) \approx +0,1\text{мм}$;	2. $\left[d'^2\right] = \left[d^2\right] - [d]^2/n$: $\left[d'^2\right] = 335 - 19^2/7 = 283,4$.

Контроли выполнены.

4. находим среднюю квадратическую ошибку одного измерения

$$m_x = \sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{283,5}{12}} = 4,86\,\text{мм} \approx 4,9\,\text{мм}.$$

5. определяем среднюю квадратическую ошибку наиболее надёжных значений измеряемых величин

$$m_{\bar{x}} = 0,5\sqrt{\frac{\left[d'^2\right]}{n-1}} = 3,43\,\text{мм} \approx 3,4\,\text{мм}.$$

6. находим относительные средние квадратические ошибки:

$$\frac{m_x}{S_{\text{ср.}}} = \frac{4,9}{134000} = \frac{1}{27000},$$

$$\frac{m_{\bar{x}}}{S_{\text{ср.}}} = \frac{3,4}{134000} = \frac{1}{39000}.$$

7. применим для обнаружения систематических ошибок менее жесткий критерий (неравенство (3.45) :

Находим (из Приложения D) для $\beta = \Phi'(t_\beta) = 0,95$ и $r = 7$ коэффициент t_β=2,4. Получаем, что

$$\left|[d]\right| = 19; \quad 1,25 t_\beta \frac{[|d|]}{\sqrt{n}} = 1,25 \times 2,4 \times \frac{45}{\sqrt{7}} = 51,$$

т.е. левая часть неравенства (3.45) оказалась меньше его правой части.

Следовательно, с вероятностью 0,95 согласно этому критерию систематическими ошибками можно пренебречь и дальнейшую оценку точности следует выполнять по формулам (3.37 – 3.38):

$$m_x = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{335}{14}} = 4,89\text{мм} \approx 4,9\text{мм}, \; m_{\bar{x}} = 0,5\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} = 3,46\text{мм} \approx 3,5\text{мм}.$$

Как видно из результатов вычислений, новые величины m_x и $m_{\bar{x}}$практически не отличаются от ранее вычисленных, однако влияние ***систематических*** ошибок с использованием этого ***менее жесткого*** критерия в процессе математической обработки ***выявить не удалось***.

4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Студент допускается к сдаче зачёта по 1 й части курса «Теория математической обработки геодезических измерений» после выполнения контрольной работы №1 и положительной оценки ее рецензентом. К рецензированию принимается только полностью выполненная работа. Если в условии задачи нет указаний на индивидуальное задание, каждый студент выполняет при решении тот *вариант* задачи, *номер которого совпадает с последней цифрой шифра* студента. Если последней цифрой шифра является нуль, студент выполняет вариант №10.

После получения студентом рецензируемой работы ему необходимо тщательно изучить замечания рецензента и внести в работу соответствующие исправления, рекомендуемые рецензентом. Студент, являясь на зачёт, представляет направление из деканата и зачтённую контрольную работу.

4.1 Контрольная работа №1

Задача №1

В табл. 1 приведены результаты измерения длин линий D_i, и абсолютные значения их истинных ошибок Δ_i. Необходимо:

1. вычислить коэффициент корреляции и оценить его надёжность с вероятностью 0,90;

2.Составить уравнение регрессии.

Таблица 1

№ п/п	D_i (км)	Δ_i (см)	№ п/п	D_i (км)	Δ_i (см)	№ п/п	D_i (км)	D_i (км)
1	7,5	4,8	11	4,3	4,7	21	7,8	7,0
2	4,7	3,5	12	5,7	3,6	22	5,7	5,6
3	6,6	4,1	13	2,8	2,3	23	6,2	5,0
4	4,9	3,2	14	3,7	3,5	24	8,5	5,5
5	7,8	5,5	15	7,1	5,5	25	6,5	6,4
6	3,9	3,2	16	8,8	6,5	26	2,8	2,3
7	8,7	6,5	17	8,9	7,2	27	7,4	4,5
8	4,2	3,5	18	3,0	3,4	28	5,5	2,7
9	6,2	3,0	19	3,5	2,7	29	5,3	5,2
10	3,3	1,5	20	8,1	6,7	30	3,5	2,4

Указания:

Каждому студенту следует исключить из таблицы те пары измерений (D_i; Δ_i), номера которых оканчиваются цифрой, совпадающей с последней цифрой шифра (например, для шифра 21п – 312 следует исключить пары с номерами 2, 12, 22), все остальные 27 пар результатов измерений необходимо принять в обработку. Вычисления следует выполнить в соответствии со схемой решения задачи 2.1

Задача №2

При исследовании нового прибора сделано пятьдесят измерений величин, точные (истинные) значения которых были известны. В таблице помещены истинные ошибки результатов измерений. Выполнить исследование на нормальный закон распределения данного ряда истинных ошибок Δ_i.

Указания:

1. исследование следует выполнить в соответствии со схемой решения задачи 3.5.1 и закончить его выводами по всем пунктам исследования;

2. каждому студенту необходимо исключить из данных таблицы истинные ошибки, номера которых оканчиваются цифрой, совпадающей с последней цифрой шифра (например, для шифра 21п – 128 следует исключить ошибки с №№ 8, 18, 28, 38, 48).

Все остальные 45 истинных ошибок следует взять в обработку.

Т а б л и ц а 2

№ п/п	Δ_i (мм)	№ п/п	Δ_i (мм)	№ п/п	Δ_i (мм)	№ п/п	Δ_i (мм)	№ п/п	Δ_i (мм)
1	+12,1	11	–2,6	21	+4,7	31	+7,9	41	+18,9
2	–1,0	12	–19,4	22	+9,1	32	+0,5	42	–8,6
3	–7,1	13	–0,5	23	–4,8	33	+18,2	43	–6,8
4	+3,2	14	+4,9	24	–17,9	34	+0,1	44	–7,9
5	+9,1	15	–0,5	25	–18,0	35	–13,5	45	+11,9
6	–1,5	16	–8,4	26	+2,0	36	+6,4	46	+13,2
7	+0,1	17	–7,9	27	+7,7	37	+2,6	47	+17,9
8	–4,0	18	+8,7	28	–13,3	38	+15,8	48	+10,1
9	+3,8	19	–10,1	29	+6,3	39	–7,1	49	+12,4
10	+1,2	20	–4,1	30	+4,2	40	–5,7	50	–0,2

Задача №3

В табл. 3 даны измеренные наклонные расстояния x_1 и измеренные углы наклона x_2.

Известны их средние квадратические ошибки : $m_{x1}=0{,}03$ м и $m_{x2}=0{,}5'$. Известны также:

высота инструмента $x_3=1{,}55$ м и высота визирования $x_4=2{,}00$ м

и их средние квадратические ошибки: $m_{x3}=m_{x4}=0{,}5$ см.

По одному из вариантов выбрать из табл. 3 значения величин x_1 и x_2 и вычислить превышение по формуле:

$$y = 0{,}5x_1 \sin 2x_2 + x_3 - x_4$$

и его среднюю квадратическую ошибку: m_y.

Указание: см. применение формулы (3.12) к решению задач 3.6.1 и 3.6.2 .

Т а б л и ц а 3

№ варианта	X_1 (м)	X_2	№ варианта	X_1 (м)	X_2
1	109,12	2°30,0′	6	117,58	6°13,9′
2	148,79	3°45,0′	7	166,64	1°52,6′
3	137,49	4°10,5′	8	146,38	4°12,9′
4	158,29	5°22,4′	9	129,28	3°38,0′
5	140,34	0°48,6′	10	115,39	5°18,0′

Задача №4

Даны результаты многократных независимых равноточных измерений одного и того же угла. Выполнить математическую обработку данного ряда:

1. определить простую арифметическую средину;
2. вычислить среднюю квадратическую ошибку отдельного результата измерений (по формуле Бесселя);
3. определить среднюю квадратическую ошибку арифметической средины; Построить доверительный интервал, накрывающий с вероятностью 0,90 истинное значение угла.

Указания:

1. каждый студент не принимает в обработку три результата измерений, номера которых равны: i, $i+1$, $i+2$, где i — последняя цифра шифра (если последняя цифра 0, то следует принять $i=10$);
2. все вычисления необходимо выполнять в соответствии со схемой решения задачи 3.7.1 (среднее значение угла следует округлить до десятых долей сек.).

Таблица 4

№ п/п	Результаты измерений, x_i	№ п/п	Результаты измерений, x_i	№ п/п	Результаты измерений, x_i
1	82°26′40,2″	5	82°26′40,4″	9	82°26′40,9″
2	42,8″	6	43,8″	10	42,5″
3	41,9″	7	44,2″	11	44,1″
4	40,8″	8	41,3″	12	21,8″

Задача №5

Даны результаты многократных независимых неравноточных измерений одного и того же расстояния (измерения выполнены одним и тем же прибором, в примерно одинаковых условиях, но разным числом приёмов).

Выполнить математическую обработку данного ряда:

1. вычислить общую арифметическую средину, предварительно назначив веса по формуле $p_i=n_i/k$, приняв $k=4$;
2. определить среднюю квадратическую ошибку измерения с весом, равным единице;
3. определить среднюю квадратическую ошибку наиболее надёжного значения;
4. построить с вероятностью 0,90 доверительный интервал для истинного значения расстояния.

Таблица 5

№ п/п	Результаты измерений, x_i (м)	Число приёмов n_i	№ п/п	Результаты измерений, x_i (м)	Число приёмов n_i	№ п/п	Результаты измерений, x_i (м)	Число приёмов n_i
1	156,388	2	5	156,385	6	9	156,381	3
2	,362	6	6	,389	2	10	,365	5
3	,371	4	7	,378	4	11	,380	4
4	,379	5	8	,372	5	12	,391	6

Указания:

1. каждый студент не принимает в обработку три результата измерений, номера которых равны: i, $i+1$, $i+2$, где i — последняя цифра шифра (если последняя цифра 0, то следует принять $i=10$);
2. все вычисления необходимо выполнять в соответствии со схемой решения задачи 3.8.3.

Задача №6

Двенадцать линий измерены дважды независимо и равноточно. Произвести оценку точности по разностям двойных измерений:

1. вычислить среднюю квадратическую ошибку одного результата измерений;
2. среднюю квадратическую ошибку средних из результатов двойных измерений;
3. относительные средние квадратические ошибки;
4. применить для обнаружения систематических ошибок жесткий и менее жесткий критерии, приняв вероятность равной 0,90.

Указания:

1. каждый студент не принимает во внимание три пары измерений, номера которых равны: i, $i+1$, $i+2$, где i — последняя цифра шифра (если последняя цифра 0, то следует принять $i=10$);
2. все вычисления выполнить в соответствии со схемой решения задачи 3.9.1.

Таблица 6

№ п/п	Результаты измерений		№ п/п	Результаты измерений	
	x'(м)	x''(м)		x'(м)	x''(м)
1	224,860	224,848	7	291,357	291,330
2	243,048	243,031	8	247,393	247,362
3	260,489	260,487	9	275,772	275,754
4	256,468	256,486	10	292,277	292,268
5	228,358	228,365	11	240,318	240,336
6	250,687	250,676	12	268,812	268,821

Список литературы

1. *Большаков В.Д., Маркузе Ю.И.* Практикум по ТМОГИ. — М.: Недра, 2007.

2. *Голубев В.В.* ТМОГИ. Книга 1. Основы теории ошибок. — М.: МИИГАиК, 2005.

3. *Письменный Д.* Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике.— М.: Айрис-ПРЕСС, 2005.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Таблица величины $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ по аргументу $t = \frac{\Delta}{m}$

$\pm t$	y	$\pm t$	y	$\pm t$	y	$\pm t$	y	$\pm t$	y
0,0	0,564	0,6	0,472	1,2	0,275	1,8	0,112	2,4	0,032
0,1	0,561	0,7	0,441	1,3	0,242	1,9	0,093	2,5	0,025
0,2	0,553	0,8	0,410	1,4	0,212	2,0	0,076	2,6	0,019
0,3	0,539	0,9	0,376	1,5	0,183	2,1	0,062	2,7	0,015
0,4	0,521	1,0	0,342	1,6	0,156	2,2	0,050	2,8	0,011
0,5	0,498	1,1	0,308	1,7	0,133	2,3	0,040	2,9	0,008
								3,0	0,006

Приложение В

Таблица значений интеграла вероятностей $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\frac{-z^2}{2}} dz.$

T	$\Phi(t)$	T	$\Phi(t)$	T	$\Phi(t)$
0,00	0,0000	1,25	0,7887	2,50	0,9876
0,05	0,0399	1,30	0,8064	2,55	0,9892
0,10	0,0797	1,35	0,8230	2,60	0,9907
0,15	0,1192	1,40	0,8385	2,65	0,9920
0,20	0,1585	1,45	0,8529	2,70	0,9931
0,25	0,1974	1,50	0,8664	2,75	0,9940
0,30	0,2358	1,55	0,8789	2,80	0,9949
0,35	0,2737	1,60	0,8904	2,85	0,9956
0,40	0,3108	1,65	0,9011	2,90	0,9963
0,45	0,3473	1,70	0,9109	2,95	0,9968
0,50	0,3829	1,75	0,9199	3,00	0,99730
0,55	0,4177	1,80	0,9281	3,10	0,99806
0,60	0,4515	1,85	0,9357	3,20	0,99863
0,65	0,4843	1,90	0,9426	3,30	0,99903
0,70	0,5161	1,95	0,9488	3,40	0,99933
0,75	0,5468	2,00	0,9545	3,50	0,99953
0,80	0,5763	2,05	0,9596	3,60	0,99968
0,85	0,6047	2,10	0,9643	3,70	0,99978
0,90	0,6319	2,15	0,9684	3,80	0,99986
0,95	0,6579	2,20	0,9722	3,90	0,99990
1,00	0,6827	2,25	0,9756	4,00	0,99994
1,05	0,7063	2,30	0,9786	4,10	0,99996
1,10	0,7287	2,35	0,9812	4,20	0,99997
1,15	0,7499	2,40	0,9836	4,40	0,99999
1,20	0,7699	2,45	0,9857	4,50	0,999994

Приложение C

Таблица значений $Z = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+|r|}{1-|r|}\right]$.

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,289	0,299
0,3	0,310	0,320	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,388	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,497	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,662	0,678
0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,775	0,793	0,811	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,950	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,189	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,528	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647
0,99	2,647	2,670	2,759	2,826	2,903	2,994	3,106	3,250	3,453	3,800

Приложение D

Коэффициенты Стъюдента t_β

R	$\Phi'(t)=\beta$												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,0
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,13	0,26	0,40	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
20	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
30	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
60	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4

Приложение Е

Таблица вероятностей $P(\chi^2)$

R \ χ^2	1	2	3	4	6	8	10	12	16
1	0,317	0,157	0,083	0,046	0,014	0,005	0,002	0,000	0,000
2	0,606	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,000
3	0,801	0,572	0,392	0,262	0,112	0,046	0,019	0,007	0,001
4	0,910	0,736	0,558	0,406	0,199	0,092	0,040	0.017	0,003
5	0,963	0,849	0,700	0,549	0,306	0,156	0,075	0,035	0,007
6	0,986	0,920	0,809	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,014
7	0,995	0,960	0,885	0,780	0,540	0,333	0,189	0,101	0,025
8	0,998	0,981	0,934	0,857	0,647	0,434	0,265	0,151	0,042
9	0,999	0,992	0,964	0,911	0,740	0,534	0,350	0,213	0,067
10	0,999	0,996	0,981	0,947	0,815	0,529	0,440	0,285	0,100
11	1,000	0.998	0,991	0,970	0,873	0,713	0,530	0,363	0,141
12		0,999	0,996	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,191
13		1,000	0,998	0,991	0,946	0,844	0,694	0,528	0,249
14			0,999	0,996	0,966	0,889	0,762	0,606	0,313
15			1,000	0,997	0,980	0,924	0,820	0,679	0,382

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОГРАММА КУРСА.. 3

ВВЕДЕНИЕ 5

1. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 6
  1.1 Нормальный закон и его основные параметры........................ 6
  1.2 Понятие о центральной предельной теореме............................ 7
  1.3 вероятность попадания нормально
   распределённой случайной величины на заданный интервал ... 7
  1.4 Интеграл вероятностей 8

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ 10
  2.1 Основные понятия 10
  2.2 Числовые характеристики.. 11
  2.3 Дополнительные характеристики
   разброса случайной величины 11
  2.4 Дополнительные характеристики формы
   кривой распределения: асимметрия и эксцесс 12
  2.5 Основные задачи математической статистики........................ 13
   2.5.1 Определение закона распределения
    на основе опытных данных 13
   2.5.2 Критерий согласия Пирсона 14
   2.5.3 Оценивание параметров.
    Методы оценивания параметров... 14
   2.5.4 доверительные интервалы
    и доверительная вероятность 15
  2.6 Элементы корреляционного анализа 16
   2.6.1 Понятие о статистических связях 16
   2.6.2 Коэффициент корреляции... 17
   2.6.3 Уравнение регрессии... 18

3. ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ 20
  3.1 Задачи теории ошибок... 20
  3.2 Классификация ошибок измерений 21
  3.3 Свойства случайных ошибок измерений................................... 21
  3.4 Критерии точности измерений 22
  3.5 Исследование ряда истинных ошибок
   на нормальное распределение 24
  3.6 Оценка точности функций измеренных величин 29
   3.6.1 Средняя квадратическая ошибка функции........................... 30
   3.6.2 Обратная задача теории ошибок 32

3.7 Равноточные измерения 32
3.7.1 Математическая обработка ряда многократных независимых равноточных измерений одной величины....32
3.7.2 Порядок обработки ряда равноточных измерений одной величины....................... 33
3.8 Неравноточные измерения.. 35
3.8.1 Общие сведения о весах.. 35
3.8.2 Обратный вес функции общего вида 36
3.8.3 Математическая обработка ряда независимых многократных неравноточных измерений ...37
3.8.4 Порядок обработки ряда неравноточных измерений...... 38
3.9. Оценка точности по разностям двойных измерений.............. 39
3.9.1 Двойные равноточные измерения 39
3.9.2 Двойные неравноточные измерения 42
3.9.3 Порядок обработки двойных равноточных измерений ряда однородных величин 43
4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 45
4.1 Контрольная работа №1 45
Список литературы 50
ПРИЛОЖЕНИЯ... 51

Внутривузовское издание

Подписано в печать 15.01.2016. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16 Бумага офсетная
Объем 3,5 усл. печ. л
Тираж 15 экз. Заказ № 04 Продаже не подлежит

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК