Министерство образования и науки РФ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ (МИИГАиК)

Факультет дистанционных форм обучения

Заочное отделение

Г.П.Емгушева, М.Д.Улымжиев

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по курсу:

«Высшая математика»

Для студентов 3 курса всех специальностей

Москва 2016

Составители:

Емгушева Г.П. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГУГиК.

Улымжиев М.Д. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГУГиК.

«Вычислительная математика»: учебно-методическое пособие по курсу «Высшая математика» для студентов 3 курса всех специальностей факультета дистанционных форм обучения. – М.: МГУГиК, 2016, 37с.

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с утвержденной программой курса «Высшая математика», рекомендованы кафедрой высшей математики и утверждены к изданию Методической комиссией факультета дистанционных форм обучения МГУГиК.

Учебно-методическое пособие представляет собой руководство к выполнению лабораторно-практических работ по курсу «Вычислительная математика». Материал разбит на шесть параграфов, в которых содержатся необходимые теоретические сведения по темам: приближенные методы решения уравнений, численные методы решения уравнений, интерполирование, аппроксимация функций по методу наименьших квадратов, численное интегрирование с использованием формул прямоугольников, трапеций и Симпсона, квадратурная формула Гаусса, сопровождающиеся чертежами. Приводятся решения типичных примеров. В конце каждого параграфа даны вопросы для самопроверки.

Рецензенты:

профессор кафедры «Высшая математика» МГУГиК Е.Г. Маркарян,

доцент кафедры «Теория вероятностей и математическая статистика» Финансового Университета при правительстве РФ О.А. Баюк.

§1. Приближенные методы решения уравнений.

При постановке математической задачи возникает вопрос о методе ее решения. Точный метод решения иногда или не нужен, или им не всегда удается воспользоваться, достаточно найти приближенное решение с определенной степенью точности. В этом случае применяют численные методы решений, это относится к решению некоторых трансцендентных уравнений, то есть уравнений, в которых неизвестная x находится под знаком трансцендентных функций, алгебраических уравнений степени выше третьей, приближенному вычислению интегралов, рядов и т.д.

Пусть задано уравнение

$$f(x)=0, \tag{1.1}$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a.b)$(конечном или бесконечном). Допустим, что уравнение (1.1) имеет лишь изолированные корни, то есть для любого корня найдется окрестность, не содержащая других корней уравнения.

Приближенное нахождение изолированных корней уравнения (1.1) складывается из двух этапов:

1. Отделение корней, то есть установление интервалов изоляции корней, внутри каждого из которых содержится только один корень уравнения.
2. Уточнение корней, то есть доведение их до заданной степени точности.

Первый этап осуществляется графически или аналитически, где используется известная из курса математического анализа теорема Больцано- Коши:

Теорема. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a,b]$, то есть $f(a)\cdot f(b)<0$, то внутри отрезка $[a,b]$ существует, по крайней мере, один корень уравнения (1.1).

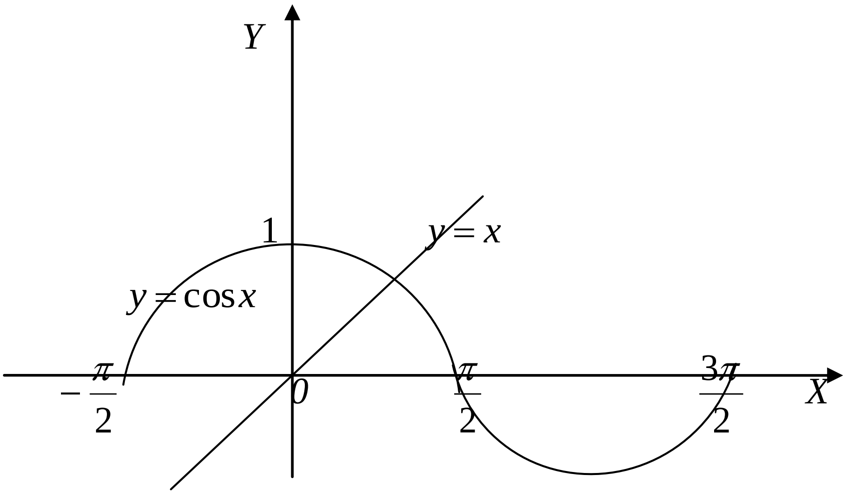
Заметим, что этот корень будет единственным, если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ одного знака внутри отрезка $[a,b]$.

На втором этапе уточнение корней нелинейных уравнений можно проводить, используя различные итерационные методы.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.1. Решить графически уравнение $\cos x - x = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\cos x = x$. Построим графики функций $y = \cos x, y = x$.



Абсцисса точки пересечения графиков этих функций $x \approx 0{,}74$, что является приближенным значением корня заданного уравнения.

Пример 1.2. Отделить аналитически корни уравнения $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}4 = 0$.

Решение. Обозначим $f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}4$. Составим таблицу знаков функции $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$sign f(x)$	-	-	+	+

Следовательно, уравнение имеет один действительный корень, лежащий в промежутке $[-1{,}0]$. Для уточнения корня, найдем первую и вторую производную. $f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x + 0{,}5, D = 0{,}16 - 6 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$

$f''(x) = 6x - 0{,}4.$ В промежутке $[-1{,}0]$справедливо неравенство $f''(x) < 0,$ значит, $f'(x), f''(x)$сохраняют знаки, то есть промежуток $[-1{,}0]$имеет один корень.

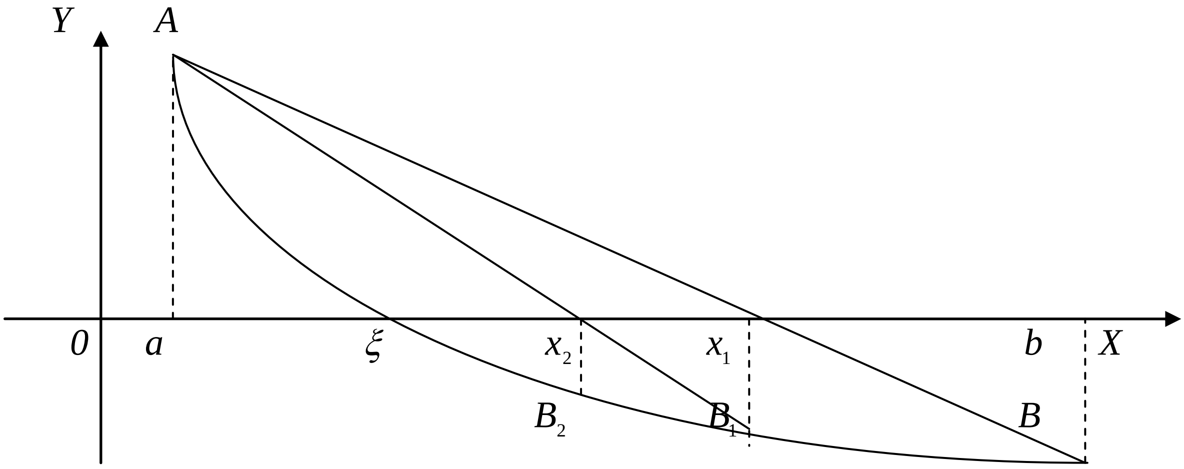
Замечание. При решении примера 1.2 применили итерационный метод, суть которого заключается в следующем. На каждом из интервалов изоляции корня $[a_k, b_k]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям: 1) $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x), f''(x)$; 2) $f(a_k)\cdot f(b_k) < 0$; 3) $f'(x), f''(x)$ сохраняют знаки $\forall x \in [a_k, b_k]$.

§2. Численные методы решения уравнений.

Пункт 1. Метод хорд.

Одним из распространенных способов приближенного решения уравнений является метод хорд.

Пусть $[a,b]$ - интервал изоляции корня уравнения (1.1): $f(x)=0$.



Для уточнения корня уравнения соединим концы кривой $y = f(x)$ хордой *AB*, точка пересечения хорды с осью абсцисс принимается за первое приближение x_1. Найдем значение функции в этой точке $f(x_1)$ и обозначим ее через B_1. Проведем хорду AB_1, ее точка пресечения с осью абсцисс принимается за следующее приближение x_2, значение функции в этой точке $f(x_2)$ обозначим через B_2, проведя достаточное количество аналогичных операций, определим с любой заданной точностью корень уравнения (1.1).

Получим формулы приближения по методу хорд. Уравнение прямой *AB* имеет вид

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}, \text{где } A(a, f(a)), B(b, f(b)).$$

Подставим в уравнение координаты точки пересечения x_1 хорды AB с осью абсцисс ($y=0$), получим первое приближение

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

Определим знак у функции $f(x_1)$. Из двух отрезков $[a,x_1],[x_1,b]$выбираем тот, на концах которого знаки у функции разные. В нашем случае (см.рис.) $f(x_1)=B_1<0,\ f(a)=A>0$. Следовательно, надо выбрать отрезок $[a,x_1]$. Уравнение хорды AB_1 имеет вид

$$\frac{x-x_1}{a-x_1} = \frac{y-f(x_1)}{f(a)-f(x_1)}.$$

Подставим в полученное уравнение координаты точки пересечения x_2 хорды AB_1 с осью абсцисс, получим второе приближение

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(a-x_1)}{f(a)-f(x_1)} \text{ или, что тоже,}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1-a)}{f(x_1)-f(a)}$$

и так далее, рассуждая аналогично, получим рекуррентную формулу для $f(a)>0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}.$$

Пусть ε заданная точность в приближенном вычислении, тогда вычисления проводят до тех пор, пока не будет выполняться условие $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$.

Замечание 1. Если $f(a)<0$, то рекуррентная формула примет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}.$$

Замечание 2. Пусть $\bar{x}$ приближенное значение корня, ξ - точное значение корня, тогда погрешность метода хорд удовлетворяет оценке

$$|\bar{x}-\xi| < -\frac{f(a)f(b)}{2}\cdot\max_{x\in[a,b]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|. \qquad (2.1)$$

Пример 2.1. Способом хорд найти положительный корень уравнения $x^4+3x-3=0$ с точностью 0,001.

Решение. Графическое отделение корней показывает, что положительный корень заключен в промежутке $[0,1]$. Обозначим $f(x)=x^4+3x-3$, определим знаки функции на концах отрезка: $f(0)=-3<0,\ f(1)=1>0$. Тогда первое приближение

$$x_1=0-\frac{f(0)(1-0)}{f(1)-f(0)}=-\frac{-3}{1+3}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

Так как $f(0{,}75)\approx-0{,}4336<0$, то применим вторично метод хорд к промежутку $[0{,}75;1]$. Получим второе приближение

$$x_2=0{,}75-\frac{f(0{,}75)(1-0{,}75)}{f(1)-f(0{,}75)}\approx0{,}75-\frac{-0{,}4336\cdot0{,}25}{1+0{,}4336}\approx0{,}8256.$$

Так как $f(0{,}8256)\approx-0{,}0586<0$, то на промежутке $[0{,}8256;1]$получим третье приближение

$$x_3=0{,}8256-\frac{f(0{,}8256)(1-0{,}8256)}{f(1)-f(0{,}8256)}\approx0{,}8256-\frac{-0{,}0586\cdot0{,}1744}{1+0{,}0586}\approx0{,}8352,$$

$f(0{,}8352)\approx-0{,}0078<0$. На промежутке $[0{,}8352;1]$ получим четвертое приближение

$$x_4=0{,}8352-\frac{f(0{,}8352)(1-0{,}8352)}{f(1)-f(0{,}8352)}\approx0{,}8352-\frac{-0{,}0078\cdot0{,}1648}{1+0{,}0078}\approx0{,}8365,$$

$f(0{,}8365)\approx-0{,}0009<0$.

На промежутке $[0{,}8365;1]$ получим пятое приближение

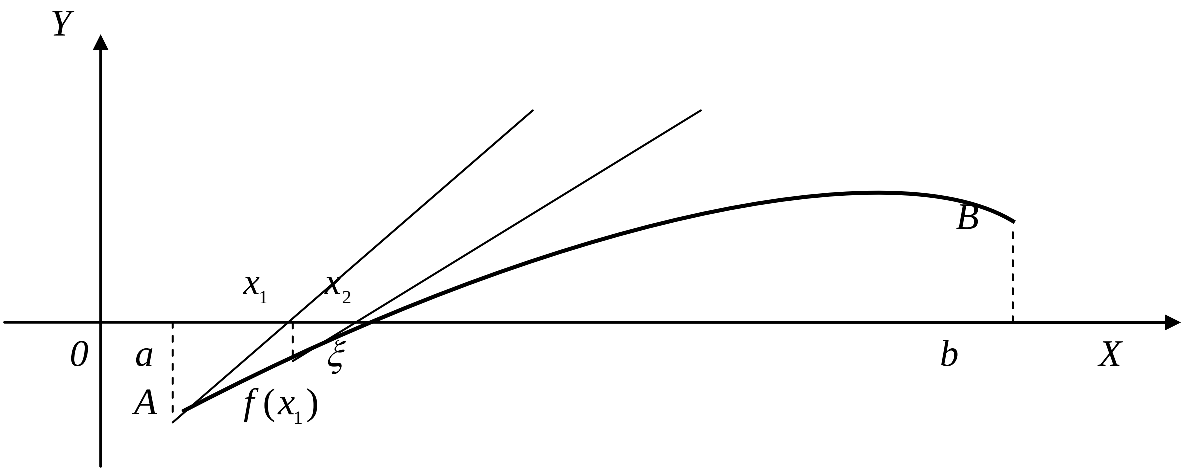
$$x_5=0{,}8365-\frac{f(0{,}8365)(1-0{,}8365)}{f(1)-f(0{,}8365)}\approx0{,}8365-\frac{-0{,}0009\cdot0{,}1635}{1+0{,}0009}\approx0{,}8366.$$

Так как $|x_5-x_4|=|0{,}8366-0{,}8365|=0{,}0001<\varepsilon=0{,}001$, то получен корень 0,8366 с точностью 0,001.

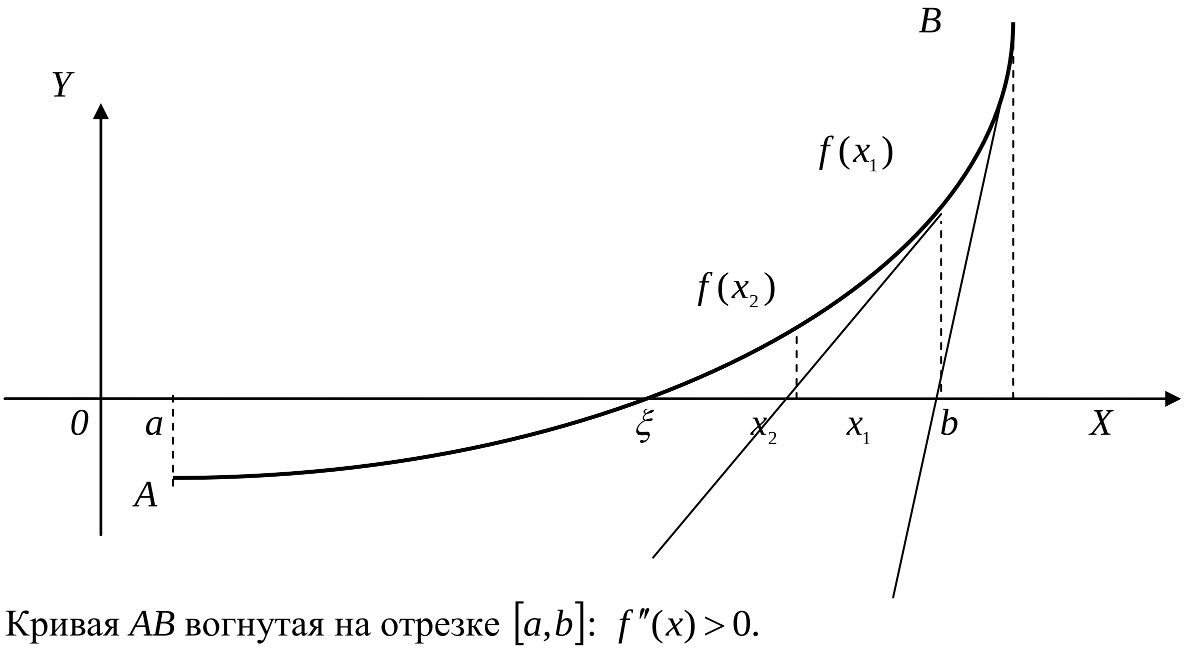
Пункт 2. Метод касательных (метод Ньютона).

В методе хорд требуется лишь непрерывность функции $f(x)$. Рассмотрим метод решения нелинейных уравнений, где используется свойство дифференцируемости функции. Этот метод обладает более быстрой сходимостью, но в то же время, применим для более узкого класса функций, и их сходимость не всегда гарантирована. Примером такого метода служит метод касательных или метод Ньютона.

Пусть $[a,b]$ - интервал изоляции корня уравнения (1.1). Предположим, как и в методе хорд, что функция *f (x)* на концах отрезка $[a,b]$ имеет разные по знаку значения, то есть $f(a)\cdot f(b)<0$; $f'(x), f''(x)$ сохраняют свои знаки и $f'(x), f''(x)\neq 0$ при $x\in[a,b]$. График функции $f(x)$ на этом отрезке может быть выпуклым или вогнутым.



Кривая *AB* выпуклая на отрезке $[a,b]$: $f''(x)<0$.



Кривая *AB* вогнутая на отрезке $[a,b]$: $f''(x)>0$.

Геометрическая суть метода состоит в том, что через один из концов кривой *AB* проводим касательную так, чтобы она пересекла отрезок $[a,b]$. Касательную следует проводить через ту точку, для которой выполняется условие $f(x)\cdot f''(x)>0$, то есть знаки функции и второй производной совпадают. Точку пресечения касательной с отрезком $[a,b]$ принимают за первое приближение x_1. Вычислим значение функции $f(x_1)$ и рассмотрим точку $(x_1, f(x_1))$ на кривой *AB*, через нее проводят касательную. Точку пересечения этой касательной с отрезком $[a,b]$ принимают за второе приближение x_2, процесс продолжают до достижения требуемой точности.

Получим рекуррентные соотношения. Пусть в точке $B(b, f(b))$ выполняется условие $f(b)\cdot f''(b)>0$. Уравнение касательной проходящей через точку $B(b, f(b))$ имеет вид

$$y - f(b) = f'(b)(x-b).$$

В точке пересечения x_1 с осью абсцисс OX $y=0$, тогда

$$-f(b) = f'(b)(x_1-b).$$

Отсюда получим первое приближение

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

В точке $(x_1, f(x_1))$ на кривой *AB* проводят новую касательную:

$y - f(x_1) = f'(x_1)(x-x_1)$. В точке пересечения $x = x_2$ с осью абсцисс OX

$y=0$, тогда $\qquad -f(x_1) = f'(x_1)(x_2-x_1)$.

Отсюда получим второе приближение

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \text{ и т.д.}$$

Таким образом, получили рекуррентные соотношения для приближенных вычислений

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Замечание 1. Пусть $\bar{x}$ приближенное значение корня, ξ - точное значение корня, тогда погрешность метода хорд удовлетворяет оценке

$$\left|\bar{x}-\xi\right| < \frac{\left[f(\xi)\right]^2}{2} \cdot \max_{x\in[a,b]}\left|\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^3}\right|. \qquad (2.2)$$

Замечание 2. Сравнивая формулы (2.1) и (2.2), заключаем, что точность метода касательных выше точности метода хорд. Но в методе касательных на каждом шаге надо вычислять и функцию, и производную в точке, а в методе хорд - только функцию, то есть объем вычислений меньше. Поэтому при одинаковом объеме вычислений в методе хорд можно сделать вдвое больше итераций и получить более высокую точность.

Пример 2.2. Методом касательных найти корень уравнения $x^3+4x-6=0$ с точностью до 0,001 на отрезке $[1,2]$.

Решение. Оценим знаки функции $f(x)=x^3+4x-6$ и ее второй производной на концах отрезка $[1,2]$:

$$f(1)=-1<0,\ f(2)=10>0,$$

$$f'(x)=3x^2+4,\ f''(x)=6x \Rightarrow f''(1)=6>0,\ f''(2)=12>0.$$

Итак, $f(x)\cdot f''(x)>0$ при $x=2$. Следовательно, за начальное приближение примем $x_0=2$. Запишем вычисления в таблице

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\Delta=\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1}=x_n-\Delta$
0	2	10	16	0,625	1,375
1	1,375	2.0996	9,6719	0,2171	1,1579
2	1,1579	0,1840	8,0222	0,0229	1,1350
3	1,1350	0,0021	7,8647	0,0003	1,1347

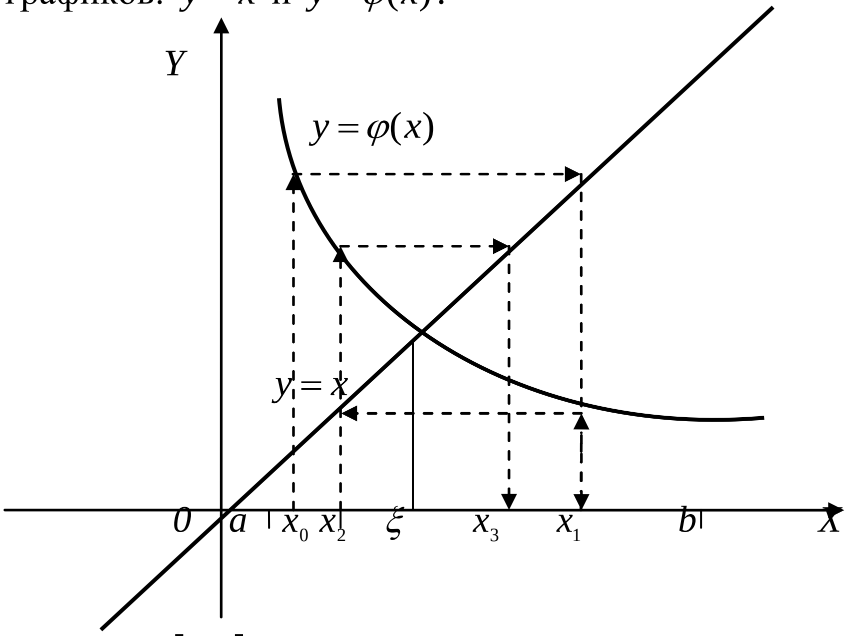
Так как $\left|x_3-x_2\right|=\left|1{,}1347-1{,}135\right|=0{,}0003<\varepsilon=0{,}001$, следовательно, искомый корень равен 1,1347 с точностью до 0,001.

Пункт 3. Метод итераций.

Для применения метода итерации исходное уравнение (1.1): $f(x)=0$ записывается в виде:

$$x=\varphi(x). \qquad (2.3)$$

Тогда корень уравнения будет находиться как точка пересечения двух графиков: $y=x$ и $y=\varphi(x)$.



Пусть $[a,b]$ - интервал изоляции корня уравнения (2.3) и $x_0\in[a,b]$ начальное приближение корня. Подставим значение x_0 в правую часть уравнения (2.3) получаем первое приближение: $x_1=\varphi(x_0)$, тогда второе приближение $x_2=\varphi(x_1)$. Подставляя каждый раз новое значение корня в уравнение (2.3) получим последовательность значений

$$x_{n+1}=\varphi(x_n). \qquad (2.4)$$

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки, т.е. если выполнено неравенство

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon,$$

где ε заданная точность приближения.

Для обеспечения сходимости метода итераций на $[a,b]$ интервале изоляции корня уравнения (2.3), производная $\varphi'(x)$ функции $y=\varphi(x)$ во всех точках интервала $[a,b]$ должна удовлетворять неравенству

$$|\varphi'(x)| \le q < 1.$$

В этом случае итерационный процесс сходится к корню ξ, причем за нулевое приближение можно взять любую точку интервала $[a,b]$.

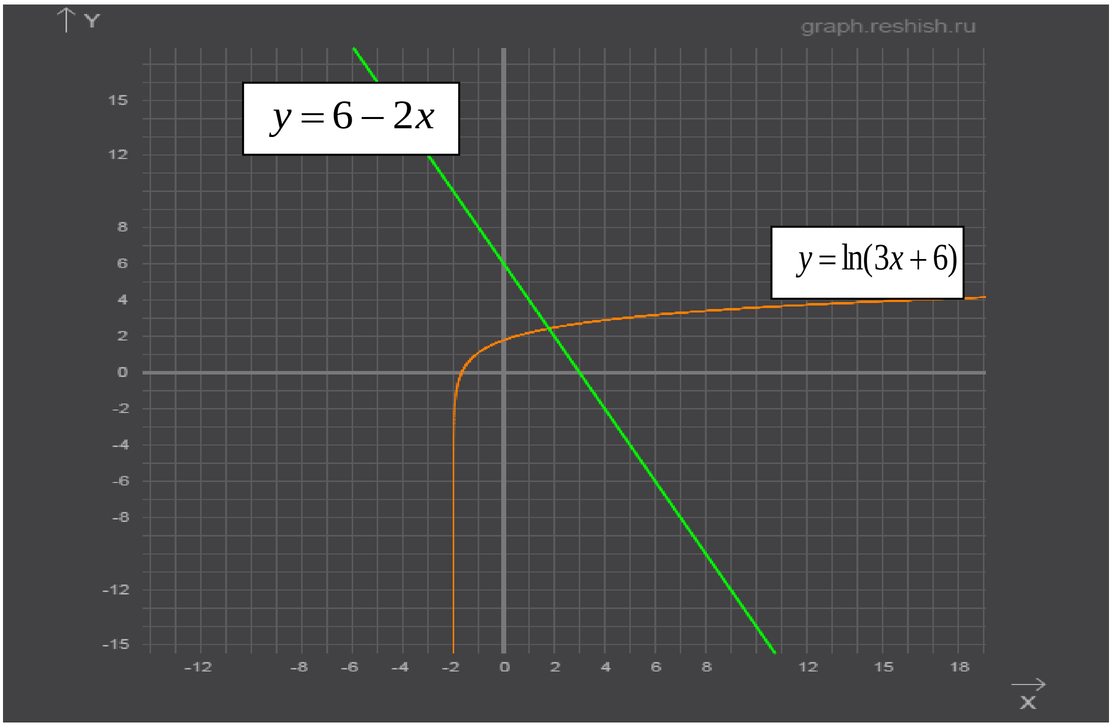
Замечание 1. Пусть $\bar{x}$ приближенное значение корня, ξ - точное значение корня, тогда погрешность метода итераций удовлетворяет неравенству

$$|\bar{x} - \xi| \le \frac{q}{1-q} \cdot |x_{n+1} - x_n|, \text{ где } q < 1.$$

Замечание 2. Метод итераций имеет важное достоинство: в нем не накапливаются ошибки вычислений. Ошибка вычисления эквивалентна некоторому ухудшению очередного приближения, что отразится только на числе итераций, а не на точности окончательного результата. Этот метод устойчив даже по отношению к грубым ошибкам, если только грубая ошибка не выходит за пределы области сходимости.

Пример 2.3. Отделить корни уравнения $2x + \ln(3x+6) = 6$ графически и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0,001.

Решение. Найдем приближенные значения корней графически, для этого исходное уравнение удобно представить в виде $\ln(3x+6) = 6 - 2x$ и изобразить графики функций $y = \ln(3x+6), y = 6 - 2x$ см.рис.)



Из графика видно, что уравнение имеет один корень, лежащий в промежутке $[1,2]$. Для уточнения корня методом итераций приведем его к виду $x=\varphi(x)$.

Функцию $\varphi(x)$ будем искать из соотношения $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{k}$, где $|k|\geq\dfrac{\max\limits_{x\in[1,2]}|f'(x)|}{2}$, число k имеет тот же знак, что и $f'(x)$ в промежутке $[1,2]$. Так как

$f(x)=2x+\ln(3x+6)-6,\ f'(x)=2+\dfrac{3}{3x+6}\Rightarrow\max\limits_{x\in[1,2]}f'(x)=2+\dfrac{3}{3\cdot1+6}\approx2{,}3333$,

$f'(x)>0$ при $x\in[1,2]$, то примем $k=2$. Тогда $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{2}=x-x-\dfrac{\ln(3x+6)}{2}+3=3-\dfrac{1}{2}\ln(3x+6)$.

За начальное приближение возьмем $x_0=1$, все остальные приближения определим из равенства

$$x_{n+1}=3-\frac{1}{2}\ln(3x_n+6).$$

Вычисления приведем в таблице:

n	x_n	$3x_n+6$	$\ln(3x_n+6)$	$\frac{1}{2}\ln(3x_n+6)$	$3-\frac{1}{2}\ln(3x_n+6)$
0	1	9	2,1972	1,0986	1,9014
1	1,9014	11,7042	2,4599	1,2299	1,7701
2	1,7701	11,3103	2,4257	1,2129	1,7871
3	1,7871	11,3614	2,4302	1,2151	1,7849
4	1,7849	11,3547	2,4296	1,2148	1,7852

Так как $|x_5-x_4|=1{,}7852-1{,}7849=0{,}0003<0{,}001=\varepsilon$, то $x\approx1{,}785$.

Вопросы для самопроверки.

1. Что называется изолированным корнем уравнения?
2. Перечислить этапы нахождения изолированного корня.
3. При каких условиях нелинейное уравнение имеет корень?
4. В чем состоит суть графического отделения корней уравнения?

5. Словесное описание алгоритма метода хорд.
6. Графическое представление метода хорд. Вычисление погрешности.
7. Словесное описание алгоритма метода касательных (Ньютона).
8. Графическое представление метода Ньютона. Условие выбора начальной точки.
9. В чем заключается различие метода хорд и касательных?
10. Графическое представление метода итераций. Условие окончания счета метода итерации. Погрешность метода.
11. Каково важное достоинство метода итераций?

§3. Интерполирование.

Пункт 1. Постановка задачи.

Пусть функция $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ задана таблично:

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

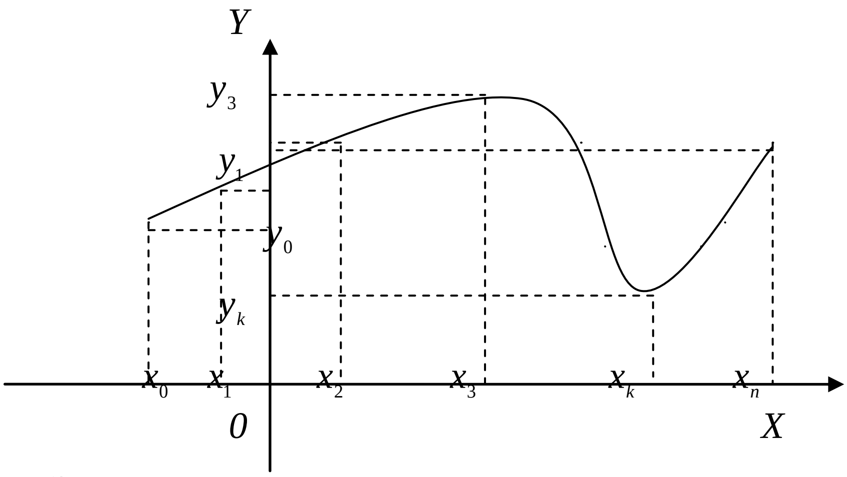
Таблица 3.1.

Здесь $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n, y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$. Отрезок $[x_0, x_n] \in [a,b]$. Нас интересует поведение функции $f(x)$ в промежуточных точках отрезка $[a,b]$. Точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют **узлами интерполяции.**

Задача интерполяции состоит в том, чтобы по таблице значений функции $f(x)$ построить ее аналитическое выражение на всем интервале $[a,b]$, то есть найти аналитическую функцию $\varphi(x)$ (интерполяционную функцию), которая бы приближала $f(x)$ на интервале $[a,b]$ и совпадала в узлах интерполяции с заданными значениями $f(x)$:

$$\varphi(x_k) = f(x_k) = y_k, k = \overline{0,n}. \qquad (3.1)$$

Геометрически интерполяция означает, что нужно найти определенную кривую $y = \varphi(x)$, проходящую через заданные точки на плоскости $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.



Эта задача неоднозначна, так как через заданные точки можно провести бесконечное множество кривых. Задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $\varphi(x)$ выбрать многочлен (полином) $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ степени не выше *n*, удовлетворяющий условиям (3.1), то есть

$$P_n(x_k) = y_k, k = \overline{0,n}.$$

Таким образом, необходимо найти аналитическое выражение для многочлена, принимающего в заданных точках заданные значения. Многочлен $P_n(x)$ называют **интерполяционным многочленом**. Формулы построения $P_n(x)$ называются **интерполяционными формулами**.

В этом случае интерполяция называется **полиномиальной** или **параболической.** Ее простейшим видом является линейная интерполяция, которая определяется по формуле

$$\varphi(x) = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \cdot (y_{k+1} - y_k), k = \overline{0, n-1}, \text{ где } x \in (x_k, x_{k+1}). \qquad (3.2)$$

Геометрически формула (3.2) означает замену кривой отрезком прямой между точками $M_k(x_k, y_k)$ и $M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$. В этом случае ошибка интерполяции $|f(x) - \varphi(x)|$ может быть велика, так как используются только два соседних узла. Чтобы использовать влияние других узлов, необходимо повысить степень интерполяционного полинома. Следовательно, при решении интерполяционной задачи рассмотрим три этапа:

1) выбор наименьшей степени *m* интерполяционного многочлена,

2) построение интерполяционного многочлена заданной степени m,

3) оценка погрешности $|f(x)-\varphi(x)|$ для любых $x \in [x_0, x_n], x \neq x_k$.

Пункт 2. Конечные и разделенные разности.

Для достижения наименьшей степени интерполяционного многочлена $\varphi(x)$ необходимо наложить условия гладкости на интерполируемую функцию $f(x)$.

О гладкости функции $f(x)$ при задании ее таблицей 3.1 с шагом $h = \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ судят по поведению ее конечных разностей. **Конечными разностями первого порядка** называют приращения функции на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$: $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, …, $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$. Для сетки из ($n+1$) узла имеем n-разностей первого порядка, из них можно составить (n-1) конечных разностей второго порядка: $\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k, k = \overline{0, n-2}.$

Тогда **конечные разности порядка *m***, где $m \leq n$, определяются через разности порядка (m-1):

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k, k = \overline{0, n-m}.$$

При выборе степени многочлена используют следующее утверждение.

Утверждение. Пусть функция $f(x)$ с шагом h имеет постоянные конечные разности порядка m, тогда функция $f(x)$ есть многочлен порядка m.

Замечание. На практике конечные разности порядка m постоянны в пределах заданной точности, тогда порядок (степень) многочлена выбирается равной m.

Конечные разности занесем в таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	…	$\Delta^{n-1} y$	$\Delta^n y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$		$\Delta^{n-1} y_0$	$\Delta^n y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$		$\Delta^{n-1} y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$			
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$				

x_4	y_4			.			
.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.			
.	.	.	.	$\Delta^3 y_{n-3}$			
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$				
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}					
x_n	y_n						

За таблицей осуществляется контроль: сумма разностей в одном столбце равна разности последнего и первого данных предыдущего столбца.

При произвольном расположении узлов интерполяции $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ о степени гладкости функции $f(x)$ судят по поведению, так называемых, разделенных разностей.

Разделенными разностями первого порядка называются величины, имеющие смысл средних скоростей изменения функций:

$$[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}, k = \overline{0, n-1}.$$

Таких разностей на сетке *n* штук из *(n+1)* узла.

Разделенными разностями второго порядка называются величины

$$[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] = \frac{[x_k, x_{k+1}] - [x_{k-1}, x_k]}{x_{k+1} - x_k}, k = \overline{1, n-1}.$$

Разделенными разностями *k*-го порядка определяются через разделенные разности *(k-1)*-го порядка с помощью рекуррентного соотношения

$$[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}] = \frac{[x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}] - [x_k, \ldots, x_{k+m-1}]}{x_{k+m} - x_k}, k = \overline{0, n-m}.$$

Число таких разностей *n-m+1*.

Так как разделенные разности для многочлена обладают свойствами, аналогичными свойствам конечных разностей, то выбор степени интерполяционного многочлена с произвольным расположением узлов проводится по тому же правилу, то есть степень должна совпадать с порядком практически разделенных разностей.

Для таблицы с постоянным шагом h легко устанавливается по индукции связь между конечными и разделенными разностями:

$$\left[x_0, x_1, \ldots, x_m\right] = \frac{\Delta^m y_0}{m! h^m}. \tag{3.3}$$

Пункт 3. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона.

При построении интерполяционного многочлена используется теорема.

Теорема. Каковы бы ни были значения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, среди которых нет равных, для произвольных значений $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, существует единственный многочлен $\varphi(x)$ степени n, принимающий в заданных точках заданные значения:

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi(x_1) = y_1, \ldots, \varphi(x_n) = y_n.$$

Для функции $f(x)$ с узлами интерполяции $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ с помощью табличных разностей устанавливают, что степень интерполяционного многочлена $\varphi(x)$ равна $m \le n$. Если $m=n$, то используют все узлы интерполяции. Если $m<n$, то выбирают $(m+1)$-й узел в зависимости от назначения строящегося многочлена.

Если искомый многочлен степени m проходит через первые $(m+1)$-е узлы $x_0, x_1, \ldots, x_m$, то он может быть представлен в виде

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} y_k \cdot P_k(x), \tag{3.4}$$

где

$P_k(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_m)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_m)}$ многочлен влияния узла x_k. Очевидно, что $P_k(x)$ является многочленом степени m, где

$$P_k(x_l)=\begin{cases}1, k=l;\\ 0, k\neq l.\end{cases}$$

Многочлены влияния зависят только от узлов влияния и не зависят от вида интерполируемой функции. Многочлен влияния обладает свойством

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)\equiv 1. \qquad (3.5)$$

При составлении интерполяционного многочлена удобно пользоваться свойством (3.5).

Таким образом, построенный многочлен (3.4) имеет степень не выше m и удовлетворяет условиям интерполяции (3.1), так как

$$\varphi_m(x_k)=y_0\cdot 0+y_1\cdot 0+\ldots+y_k\cdot 1+\ldots+y_m\cdot 0=y_k, k=\overline{0,m}.$$

Формула (3.4) называется **интерполяционным многочленом в форме Лагранжа.**

Замечание. Если $f(x)$ не является многочленом k-порядка, а лишь приближается им, то выбор ($k+1$)–узла из таблицы осуществляется в зависимости от расположения интересующей нас точки x^*, в которой оценивается значение функции $f(x)$. В этом случае ($k+1$)–узел выбирается вблизи точки x^*, при этом производится перенумерация.

Существенным недостатком интерполяционного многочлена в форме Лагранжа является тот факт, что с привлечением дополнительного узла в таблицу данных 3.1 добавляется еще одно слагаемое, которое влечет вычисление всех многочленов влияния. Этот недостаток исключается, если интерполяционный многочлен представить в другой форме:

$$\varphi_m(x)=y_0+[x_0,x_1](x-x_0)+[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots$$
$$+[x_0,x_1,..,x_m](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m=1})=y_0+\sum_{k=1}^{m}\left([x_0,x_1,\ldots,x_k]\prod_{l=0}^{k-1}(x-x_l)\right), \qquad (3.6)$$

называемой **формой Ньютона.**

Заметим, что многочлен $\varphi_m(x)$ имеет порядок не выше m, для которого выполнятся условия интерполяции (3.1).

Для таблицы с постоянным шагом h многочлен в форме Ньютона можно представить с учетом (3.3) в виде

$$\varphi_m(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^m y_0}{m!h^m}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m-1}). \qquad (3.7)$$

Пример 3.1. Составьте таблицу значений функции $y = \sqrt[3]{5x-1}$ на отрезке $[-0{,}5;2]$ с шагом h=0,5. В значениях функции сохраняйте три знака после запятой. Используя квадратичную интерполяцию по полученной таблице, вычислите значение функции в точке x^*=1,3. Вычисления проводите двумя способами: 1)по формуле Лагранжа;

2) по формуле Ньютона.

Решение. Составим таблицу значений:

x	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	-1,518	-1	1,145	1,587	1,866	2,080

1) В таблице заданы шесть узлов. Применим квадратичную интерполяцию, поэтому по формуле Лагранжа построим многочлен второго порядка (см.(3.4)):

$$L_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Многочлен второго порядка будем строить по значениям в ближайших трех точках к точке x^*=1,3:

$$x_0 = 1; x_1 = 1{,}5; x_2 = 2.$$

$$L_2(x) = 1{,}587\cdot\frac{(x-1{,}5)(x-2)}{(1-1{,}5)(1-2)} + 1{,}866\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(1{,}5-1)(1{,}5-2)} + 2{,}080\cdot\frac{(x-1)(x-1{,}5)}{(2-1)(2-1,{,}5)} =$$

$$= 1{,}587\cdot\frac{x^2-3{,}5x+3}{0{,}5} + 1{,}866\cdot\frac{x^2-3x+2}{(-0{,}25)} + 2{,}080\cdot\frac{x^2-2{,}5x+1{,}5}{0{,}5} =$$

$$= 3{,}174\cdot(x^2-3{,}5x+3) - 7{,}464\cdot(x^2-3x+2) + 4{,}16\cdot(x^2-2{,}5x+1{,}5) =$$

$$= -0{,}13x^2 + 0{,}883x + 0{,}834.$$

Используем полученный многочлен и вычислим

$L_2(1{,}3) = -0{,}13 \cdot 1{,}3^2 + 0{,}883 \cdot 1{,}3 + 0{,}834 \approx 1{,}762.$

2) Построим интерполяционный многочлен второго порядка по формуле Ньютона (см.(3.7)):

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\left(x - x_0\right) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right),$$

где $\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1$- конечные разности первого порядка данной функции, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$- конечная разность второго порядка.

Составим таблицу конечных разностей.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	1,587	0,279	-0,065
1,5	1,866	0,214	
2	2,080		

Подставим значения y_0, x_0, x_1, h и найденные значения конечных разностей в интерполяционный многочлен в форме Ньютона, получим

$$\frac{0{,}279}{0{,}5}\left(x-1\right) - \frac{0{,}065}{2!0{,}5^2}\left(x-1\right)\left(x-1{,}5\right) = 1{,}587 + 0{,}558\left(x-1\right) -$$

Откуда $P_2(1{,}3) \approx 1{,}762.$

Вопросы для самопроверки.

1. В чем состоит задача интерполяции? Геометрический смысл интерполяции. Теорема о единственности интерполяционного многочлена.
2. Интерполируемая функция и ее конечные, разделенные разности.
3. Написать формулу интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.
4. Написать формулу интерполяционного многочлена с постоянным шагом в форме Ньютона.

§4. Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов.

Как было сказано ранее, задача полиномиальной интерполяции функции, заданной таблицей своих значений, заключается в нахождении многочлена степени не выше n, значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями интерполируемой функции. При большом количестве узлов нахождение интерполяционного многочлена становится затруднительным из-за большого числа вычислений. Поэтому для того, чтобы упростить вычисления, в некоторых случаях требование совпадения значений многочлена со значениями интерполируемой функции в узлах интерполяции заменяют на более слабое требование. Заметим, что при этом в некоторых случаях мы получаем незначительную потерю точности вычислений при их значительном упрощении. Задача нахождения в некотором классе функций функции, наиболее “ близкой ” в некотором смысле к табличной функции называется задачей аппроксимации. В этом пункте мы рассмотрим полиномиальную аппроксимацию по методу наименьших квадратов. Пусть дана таблица значений неизвестной функции:

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Задача полиномиальной аппроксимации по методу наименьших квадратов заключается в нахождении многочлена степени не выше m, где $m < n$, для которого сумма квадратов разностей между значениями многочлена в точках x_i и значениями табличной функции в этих точках y_i является наименьшей среди всех многочленов степени не выше m. Если m=1, то полиномиальная аппроксимация называется линейной, а если m=2, то квадратичной. Многочлен степени не выше m можно записать в виде

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Тогда решение задачи полиномиальной аппроксимации сводится к нахождению точки минимума функции m+1-ой переменной

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j - y_i \right)^2.$$

В этой точке частные производные функции $\Phi(a_0,a_1,\dots,a_m)$ по переменным a_j, $j = 0,\dots,m$, должны равняться нулю. Имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j - y_i\right) = 2\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^j\right)\cdot a_j - 2\sum_{i=0}^{n} y_i;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_k} = 2\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x_i^j - y_i\right)\cdot\ x_i^k = 2\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k}\right)\cdot a_j - 2\sum_{i=0}^{n} y_i \cdot x_i^k.$$

Приравнивая эти частные производные к нулю, и преобразуя полученные уравнения, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_0,a_1,\dots,a_m$:

$$\begin{cases} c_0 a_0 + c_1 a_1 \dots + c_m a_m = b_0 \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 \dots + c_{m+1} a_m = b_1 \\ - - - - - - - - \\ c_m a_0 + c_{m+1} a_1 \dots + c_{2m} a_m = b_m \end{cases},$$

где $c_0 = n + 1$, $c_s = \sum_{i=0}^{n} x_i^s$, $s = 1,2,\dots,2m$, $b_0 = \sum_{i=0}^{n} y_i$, $b_j = \sum_{i=0}^{n} x_i^j y_i$, $j = 1,2,\dots,m$.

Вычислять коэффициенты c_s и свободные члены b_j данной системы удобно с помощью следующей таблицы:

№	x_i	x_i^0	x_i^1	…	x_i^{2m}	y_i	$x_i \cdot y_i$	…	$x_i^m \cdot y_i$
0	x_0	1	x_0^1	…	x_0^{2m}	y_0	$x_0 \cdot y_0$	…	$x_0^m \cdot y_0$
1	x_1	1	x_1^1	…	x_1^{2m}	y_1	$x_1 \cdot y_1$	…	$x_1^m \cdot y_1$
-	-	-	-	…	-	-	-	…	-
-	-	-	-	…	-	-	-	…	-
n	x_n	1	x_n^1	…	x_n^{2m}	y_n	$x_n \cdot y_n$	…	$x_n^m \cdot y_n$
$\sum$		$c_0 = n+1$	$c_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i^1$	…	$c_{2m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m}$	$b_0 = \sum_{i=0}^{n} y_i$	$b_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$	…	$b_m = \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i$

Пример 4.1. Функция задана таблицей своих значений. Найти многочлен не выше первой степени, аппроксимирующий функцию по методу наименьших квадратов. Найти значение многочлена в точке $x = 0{,}7$. Изобразить точки таблицы и график аппроксимирующего многочлена на

одном рисунке. Вычислить значение величины $\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n} v_i^2}{n+1}}$, где $v_i = y_i - P_1(x_i)$, $i=0,1,\ldots n$; $P_1(x)$ – аппроксимирующий многочлен. Величина μ оценивает близость аппроксимирующего многочлена к табличной функции.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_i	0,17	0,246	0,277	0,302	0,322	0,34

Решение. Так как аппроксимирующий многочлен является многочленом не выше первой степени, то он может быть записан в виде: $P_1(x)=a_1x+a_0$. Таким образом система уравнений для нахождения a_0 и a_1 имеет вид:

$$\begin{cases} c_0a_0 + c_1a_1 = b_0 \\ c_1a_0 + c_2a_1 = b_1 \end{cases}$$

Для нахождения коэффициентов системы c_0,c_1,c_2 и свободных членов системы b_0 и b_1 заполним следующую таблицу:

i	x_i	x_i^0	x_i^1	x_i^2	y_i	x_iy_i
0	0	1	0	0	0,17	0
1	0,2	1	0,2	0,04	0,246	0,0492
2	0,4	1	0,4	0,16	0,277	0,1108
3	0,6	1	0,6	0,36	0,302	0,1812
4	0,8	1	0,8	0,64	0,322	0,2576
5	1	1	1	1	0,34	0,34
$\sum$		$c_0=6$	$c_1=3$	$c_2=2,2$	$b_0=1,657$	$b_1=0,939$

Находим a_0 и a_1 из системы уравнений:

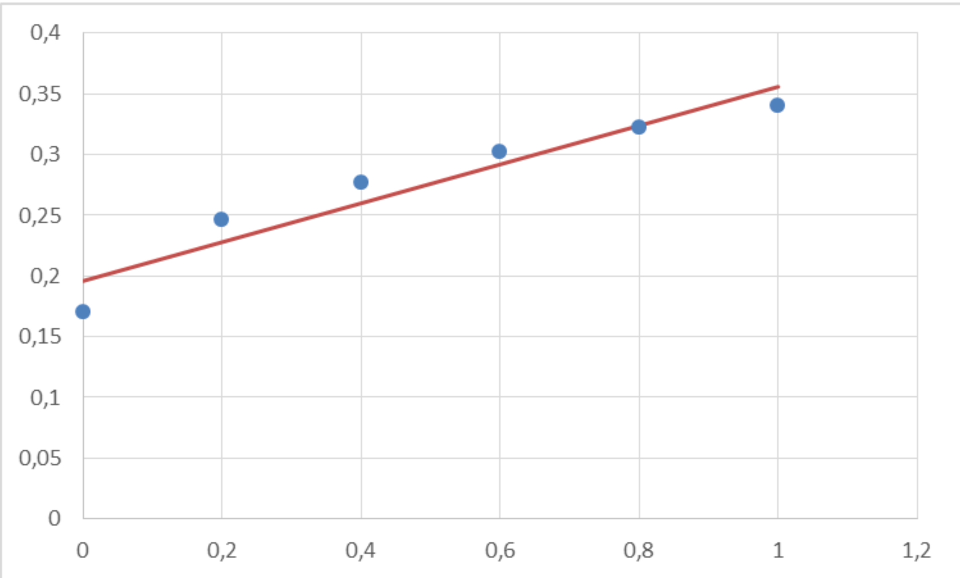
$$\begin{cases} 6a_0 + 3a_1 = 1,657 \\ 3a_0 + 2,2a_1 = 0,939 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем: $a_1 = 0,552 - 2a_0$. Подставим полученное выражение во второе уравнение системы: $3a_0+2,2(0,552 - 2a_0) = 0,939$. Отсюда находим a_0 и a_1: $3a_0+2,2(0,552 - 2a_0) = 0,939 \Rightarrow 3a_0 + 1,214 –$

$4{,}4a_0 = 0{,}939 \Rightarrow 1{,}4a_0 = 0{,}275 \Rightarrow a_0 = 0{,}196 \Rightarrow a_1 = 0{,}552 - 2\cdot 0{,}196 = 0{,}16$. Таким образом аппроксимирующий многочлен имеет вид: $P_1(x)=0{,}16x+0{,}196$. Найдем значение многочлена в точке $x = 0{,}7$: $P_1(0{,}7)=0{,}16\cdot 0{,}7+0{,}196=0{,}272$. Для вычисления μ составим вспомогательную таблицу:

i	x_i	y_i	$P_1(x_i)$	$v_i=y_i-P_1(x_i)$	v_i^2
0	0	0,17	0,196	-0,026	0,000676
1	0,2	0,246	0,228	0,018	0,000324
2	0,4	0,277	0,26	0,017	0,000289
3	0,6	0,302	0,292	0,01	0,0001
4	0,8	0,322	0,324	-0,002	0,000004
5	1	0,34	0,356	-0,016	0,000256
$\sum$					0,001649

$\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{5} v_i^2}{6}} = \sqrt{\frac{0{,}001649}{6}} = 0{,}0166$. Изобразим на одном рисунке точки таблицы и график аппроксимирующего многочлена:



Вопросы для самопроверки.

1. В чем заключается задача полиномиальной аппроксимации по методу наименьших квадратов?

2. Какая полиномиальная аппроксимация называется линейной? Какая полиномиальная аппроксимация называется квадратичной?

3. К чему сводится решение задачи полиномиальной аппроксимации?

§5. Численное интегрирование.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ ее первообразная, тогда определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Однако применение формулы Ньютона-Лейбница, не всегда возможно и целесообразно. Так, не для любой непрерывной функции *f(x)* ее первообразная *F(x)* выражается через элементарные функции, кроме того функция *f(x)* может быть задана графически или таблично. В этих случаях применяют формулы численного интегрирования или квадратурные формулы.

Пункт 1. Формулы прямоугольников и трапеций.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Известно, что значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ численно равно площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ (положим для определенности $f(x) > 0$), прямыми $x = a$, $x = b$ и осью *OX*.

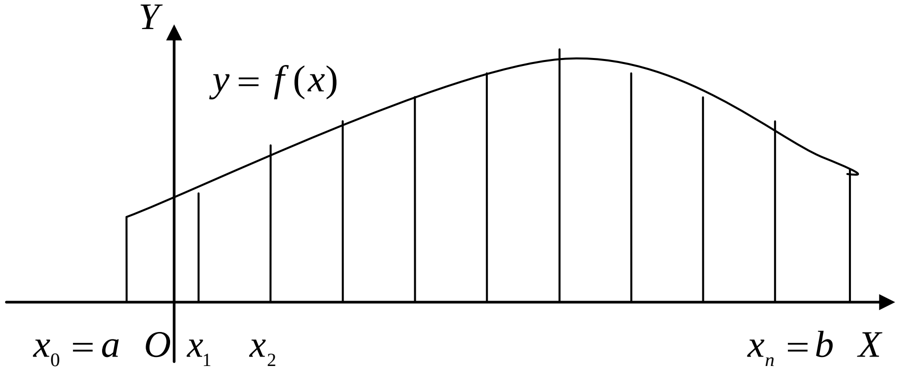


Рис.5.1.

Разобьем интервал интегрирования $[a,b]$ на n равных частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ с шагом разбиения $h = \dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$, тогда $x_k = x_0 + k \cdot h, k = 1,2,\ldots,n.$ (см. рис.5.1.).

Получим формулу прямоугольников для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$. На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ заменим функцию $y = f(x)$ прямой $\tilde{y}_k = f(\frac{x_{k-1} + x_k}{2})$, $k = 1,2,\ldots,n,$ другими словами, на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ заменим исходную функцию $f(x)$ на интерполирующую $\tilde{y}_k = f(\frac{x_{k-1} + x_k}{2})$. Приняв ординату $\tilde{y}_k$ за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \tilde{y}_k$:

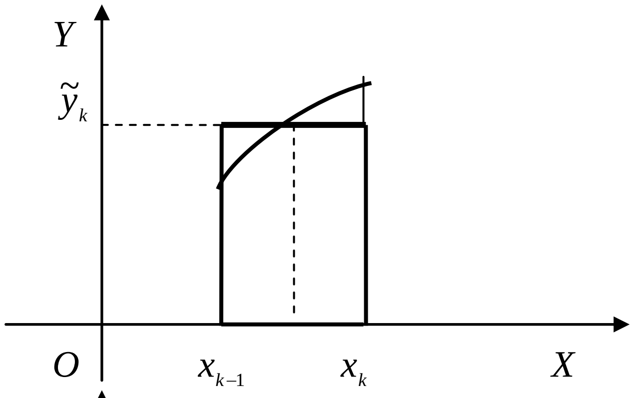
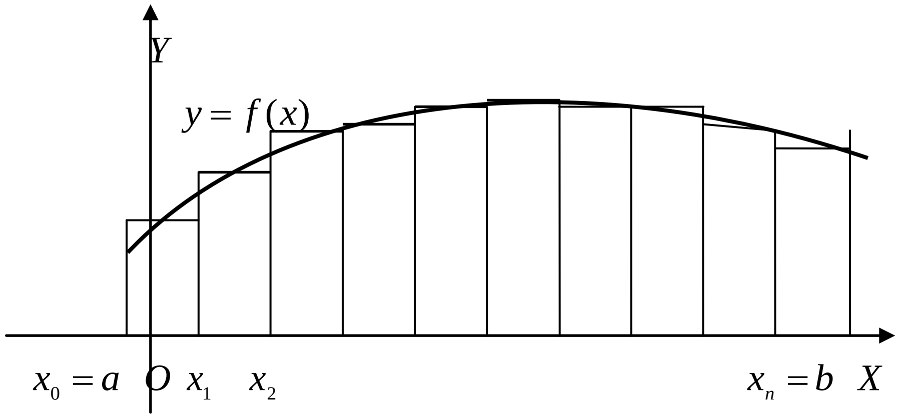


Рис.5.2.



Тогда сумма площадей всех n прямоугольников дает площадь ступенчатой фигуры численно равной приближенному значению исходного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right). \qquad (5.1)$$

Формула (5.1) называется **формулой прямоугольников**.

Разность между левой и правой частью приближенного равенства (5.1) называется остаточным членом $R_n(f)$:

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right).$$

Тогда абсолютная погрешность остаточного члена $R_n(f)$, для функций с ограниченной второй производной $\left|f''(x)\right| \le M$ для всех $x \in [a,b]$ удовлетворяет оценке

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} M . \qquad (5.2)$$

Замечание. Приближенное равенство (5.1) для линейной функции $f(x) = kx + b$ является точным, так как вторая производная $f''(x) = 0$.

Формула трапеций выводится аналогично формуле прямоугольников. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n,$ криволинейная трапеция (рис.5.1.) заменяется обычной трапецией, звенья которой соединяют концы ординат y_{k-1} и y_k, $k = 1,2,\ldots,n$ (см. рис.5.3):

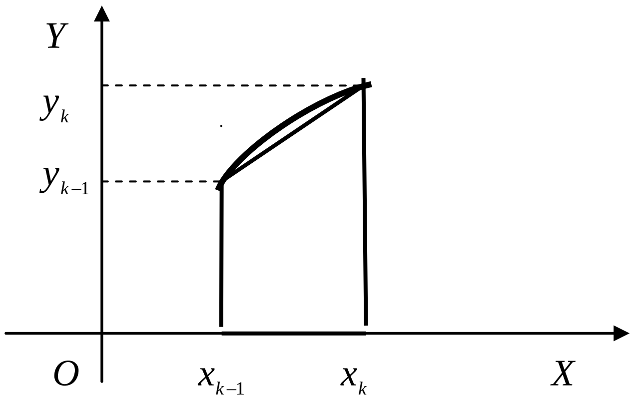


Рис.5.3.

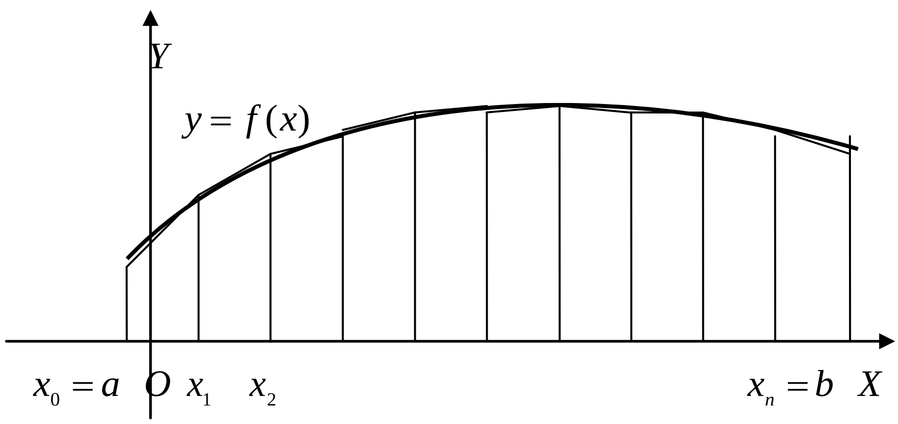


Рис.5.4.

Таким образом, исходная функция $y = f(x)$ заменяется интерполирующей $y_k = f(x_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$ (см. рис. 5.4).

Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_{k-1}, y_k, $k = 1,2,\ldots,n,$ и высотой $h = \dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + h \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \right.$$
$$\left. + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right) \qquad (5.3)$$

Формула (5.3) называется **формулой трапеций**.

Остаточный член для формулы трапеций имеет вид $R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \dfrac{b-a}{n} \cdot \left(\dfrac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$.

Тогда абсолютная погрешность остаточного члена $R_n(f)$, для функций с ограниченной второй производной $|f''(x)| \le M$ для всех $x \in [a,b]$удовлетворяет оценке

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M . \qquad (5.4)$$

Формулу (5.4) сравнить с (5.2). Равенство (5.3) для линейных функций $f(x)$ в случае формулы трапеций является точным, как и в случае прямоугольников.

Пример 5.1. Вычислить интеграл $\int_1^2 \dfrac{\lg(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$ двумя способами а) по формуле прямоугольников, б) по формуле трапеций. Интервал интегрирования разбить на десять частей. Вычисления выполняйте с четырьмя знаками после запятой.

Решение. Имеем $f(x) = \dfrac{\lg(x+1)}{\sqrt{x+1}}, a = x_0 = 1, b = x_{10} = 2, h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{10}.$

а) Для вычисления интеграла $\int\limits_1^2 \frac{\lg(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$ применим формулу прямоугольников (5.1):

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(\frac{x_0+x_1}{2}) + f(\frac{x_1+x_2}{2}) + \ldots + f(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}) \right) = h \cdot (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_n),$$

где $\tilde{y}_k = f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right), k = 1,2,\ldots,n.$

Все необходимые данные занесем в таблицу:

k	x_{k-1}	x_k	$\tilde{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$	$\lg(\tilde{x}_k+1)$	$\sqrt{\tilde{x}_k+1}$	$\tilde{y}_k = \frac{\lg(\tilde{x}_k+1)}{\sqrt{\tilde{x}_k+1}}$
1	1	1,1	1,05	0,3118	1,4318	0,2178
2	1,1	1,2	1,15	0,3324	1,4663	0,2267
3	1,2	1,3	1,25	0,3522	1,5	0,2348
4	1,3	1,4	1,35	0,3711	1,5330	0,2421
5	1,4	1,5	1,45	0,3892	1,5653	0,2486
6	1,5	1,6	1,55	0,4065	1,5969	0,2546
7	1,6	1,7	1,65	0,4232	1,6279	0,2600
8	1,7	1,8	1,75	0,4393	1,6583	0,2649
9	1,8	1,9	1,85	0,4548	1,6882	0,2694
10	1,9	2	1,95	0,4698	1,7176	0,2735

Подставим вычисления из последнего столбца таблицы в формулу, получим

$$\int\limits_1^2 \frac{\lg(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx \approx \frac{1}{10} \cdot (0{,}2178 + 0{,}2267 + 0{,}2348 + 0{,}2421 + 0{,}2486 + 0{,}2546 + 0{,}2600 + \\ + 0{,}2649 + 0{,}2694 + 0{,}2735) \approx 0{,}2492.$$

б) Для вычисления интеграла $\int_1^2 \frac{\lg(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$ воспользуемся формулой трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) \right) =$$

$$= h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \right), y_k = f(x_k),\ k = 1,2,\ldots,n. \quad (5.3)$$

Произведем вычисления и занесем данные в таблицу:

k	x_k	$\lg(x_k+1)$	$\sqrt{x_k+1}$	$y_k = \frac{\lg(x_k+1)}{\sqrt{x_k+1}}$
0	1	0,3010	1,4142	0,2128
1	1,1	0,3222	1,4491	0,2223
2	1,2	0,3424	1,4832	0,2309
3	1,3	0,3617	1,5166	0,2385
4	1,4	0,3802	1,5492	0,2454
5	1,5	0,3979	1,5811	0,2517
6	1,6	0,4150	1,6125	0,2574
7	1,7	0,4314	1,6432	0,2625
8	1,8	0,4472	1,6733	0,2673
9	1,9	0,4624	1,7029	0,2715
10	2	0,4771	1,7321	0,2754

Подставим данные последнего столбца таблицы в формулу трапеций, получим

$$\int_1^2 \frac{\lg(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx \approx \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{0,2128+0,2754}{2} + 0,2223 + 0,2309 + 0,2385 + 0,2454 + 0,2517 + \right.$$

$$\left. + 0,2574 + 0,2625 + 0,2673 + 0,2715 \right) \approx 0,2492.$$

Пункт 2. Метод Симпсона.

При приближенном вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ методом Симпсона отрезок интегрирования *[a,b]* разбивают на четное число частей *n* точками x_i, $i = 0,1,2,...,n$; $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = h$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 1,2,3,...,n$. На каждом из отрезков $[x_{i-1},x_{i+1}]$, $i = 1,3,5,...,n-1$, функцию $f(x)$ заменяют на $L_i(x)$ - интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, значения которого в точках x_{i-1}, x_i, x_{i+1} совпадают со значениями функции $f(x)$ в этих точках. Затем считают приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ равным интегралу от полученной функции по отрезку *[a,b]*.

Обозначим через $y_i = f(x_i)$, $i= 0,1,2,...,n$. Имеем:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_i(x)dx =$$

$$=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left(y_{i-1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}+y_i\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}+y_{i+1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})}\right)dx=$$

$$=\begin{bmatrix} t = x - x_i \\ dt = dx \\ t_н = -h \\ t_в = h \end{bmatrix} = y_{i-1}\int_{-h}^{h}\frac{t(t-h)}{-h(-2h)}dt + y_i\int_{-h}^{h}\frac{(t+h)(t-h)}{h(-h)}dt + y_{i+1}\int_{-h}^{h}\frac{t(t+h)}{h(2h)}dt =$$

$$=\frac{y_{i-1}}{2h^2}\int_{-h}^{h}(t^2-ht)dt - \frac{y_i}{h^2}\int_{-h}^{h}(t^2-h^2)dt + \frac{y_{i+1}}{2h^2}\int_{-h}^{h}(t^2+ht)dt = \frac{1}{3}hy_{i-1}+\frac{4}{3}hy_i+\frac{1}{3}hy_{i+1},$$

$$i = 1,3,5,...,n-1.$$

Отсюда получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} L_1(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} L_3(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} L_{n-1}(x)dx = \frac{1}{3}hy_0+\frac{4}{3}hy_1+\frac{1}{3}hy_2+\frac{1}{3}hy_2+\frac{4}{3}hy_3+\frac{1}{3}hy_4+\ldots+\frac{1}{3}hy_{n-2} + \frac{4}{3}hy_{n-1}+\frac{1}{3}hy_n.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})).$$

Данная формула называется **формулой Симпсона** приближенного вычисления определенного интеграла.

Обозначим остаточный член формулы Симпсона через R_h,

$$R_h = \int_a^b f(x)dx \approx -\frac{h}{3}(y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})).$$

Остаточный член формулы Симпсона можно представить в виде:

$$R_h = \frac{b-a}{180} h^4 f''''(\xi), \text{ где } \xi \in (a,b).$$

Таким образом, формула Симпсона дает точное значение определенного интеграла для многочленов не выше третьей степени. Так как зачастую оценить производную четвертого порядка подынтегральной функции бывает затруднительно, то для оценки погрешности вычисления используют правило Рунге. **Правило Рунге** заключается в том, что если подынтегральная функция является достаточно гладкой, то приближенное значение остаточного члена формулы Симпсона можно найти по формуле:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15},$$

где I_h- приближенное значение интеграла, вычисленное по формуле Симпсона с шагом h а I_{2h}- приближенное значение интеграла, вычисленное по формуле Симпсона с шагом $2h$.

Пример 5.2. Вычислить интеграл $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1}}$ по формуле Симпсона, приняв $n = 8$, оцените погрешность по Рунге полученного результата, пользуясь способом удвоения шага вычисления. Вычисления выполнять с пятью знаками после запятой.

Решение. Для удобства вычислений заполним таблицу:

I	x_i	y_i	ε_i	δ_i	$\varepsilon_i y_i$	$\delta_i y_i$
0	2	0,447214	1	1	0,447214	0,447214
1	2,125	0,387943	4	0	1,551772	0
2	2,25	0,341121	2	4	0,682242	1,364485
3	2,375	0,303294	4	0	1,213175	0
4	2,5	0,272166	2	2	0,544331	0,544331
5	2,625	0,246154	4	0	0,984615	0
6	2,75	0,224133	2	4	0,448265	0,896531
7	2,875	0,20528	4	0	0,82112	0
8	3	0,188982	1	1	0,188982	0,188982
				$\sum$	6,881717	3,441542

Заметим, что коэффициенты ε_i предназначены для вычисления интеграла с шагом h, а δ_i для вычисления интеграла с шагом $2h$. Вычислим интеграл с шагом h:

$$I_h = \frac{h}{3}(y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)) = \frac{0{,}125}{3} \cdot 6{,}881717 = 0{,}286738.$$

Вычислим интеграл с шагом $2h$:

$$I_h = \frac{2h}{3}(y_0 + y_8 + 4(y_2 + y_6) + 2y_4) = \frac{0{,}25}{3} \cdot 3{,}441542 = 0{,}286795.$$

Найдем приблизительное значение погрешности вычисления R_h для интеграла I_h, применив правило Рунге:

$$R_h = \frac{I_h - I_{2h}}{15} = \frac{0{,}286738 - 0{,}286795}{15} = -0{,}0000038.$$

Отсюда получаем уточненное значение интеграла:

$$I = I_h + R_h = 0{,}286738 - 0{,}0000038 = 0{,}286734.$$

§6. Квадратурная формула Гаусса приближенного вычисления определенного интеграла.

Квадратурная формула Гаусса приближенного вычисления определенного интеграла является формулой наивысшей алгебраической точности. Это означает, что при данном количестве узлов n квадратурная формула Гаусса дает точное значение определенного интеграла для многочленов наибольшей возможной степени (степени $2n$-1). В отличие от формул прямоугольников, трапеций и Симпсона, формула Гаусса не является формулой с равноотстоящими узлами. Квадратурная формула Гаусса имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{l=1}^{n} c_i f(x_i),$$

где $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t_i$. Числа c_i и t_i находятся из таблицы в зависимости от числа узлов n. Для $n = 5$ таблица значений чисел c_i и t_i имеет вид:

i	t_i	c_i
1	-0,906179846	0,236926885
2	-0,538469310	0,478628670
3	0	0,568888889

4	0,538469310	0,478628670
5	0,906179846	0,236926885

Пример 6.1. Вычислить интеграл $\int_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^3-3x^2+1}}$ по формуле Гаусса при $n = 5$.

Решение. Так как a=2, а b=3, то $x_i=\frac{3+2}{2}+\frac{3-2}{2}t_i$= 2,5+0,5$t_i$, i = 1,2,…,5. Результаты вычислений заносим в таблицу:

i	t_i	c_i	x_i	$f(x_i)$	$c_if(x_i)$
1	-0,90618	0,236927	2,04691	0,866299	0,205249
2	-0,53847	0,478629	2,230765	0,775571	0,37121
3	0	0,568889	2,5	0,680414	0,38708
4	0,538469	0,478629	2,769235	0,61212	0,292978
5	0,90618	0,236927	2,95309	0,575354	0,136317
$\sum$					1,392835

Имеем:

$$\int_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^3-3x^2+1}} = \frac{b-a}{2}\left(c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+c_3f(x_3)+c_4f(x_4)+c_5f(x_5)\right)=0{,}5\cdot 1{,}392835=0{,}696417.$$

Вопросы для самопроверки.

1. В каких случаях применяют формулы численного интегрирования или квадратурные формулы?
2. Какая формула называется формулой прямоугольников? Записать остаточный член для формулы прямоугольников.
3. Какая формула называется формулой трапеций? Записать остаточный член для формулы трапеций.
4. Какая формула называется формулой Симпсона приближенного вычисления определенного интеграла? В каком виде можно представить остаточный член формулы Симпсона?
5. В каких случаях формула Симпсона дает точное значение определенного интеграла? В чем заключается правило Рунге?

6. Чем отличается формула Гаусса от формул прямоугольников, трапеций и Симпсона? Какой вид имеет квадратурная формула Гаусса?

Используемая литература.

1. Р.С. Гутер, Б.В.Овчинский Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: «Наука», 1970.

2. Г.Н. Воробьева, А.Н.Данилова Практикум по численным методам. –М.: «Высшая школа», 1979.

3. Н.А. Кувекина, Е.Г. Маркарян Методические указания, программа и контрольные работы по курсу «Высшая математика» для студентов 3 курса всех специальностей факультета дистанционных форм обучения. – М.: МИИГАиК, 2013.

Оглавление

§1. Приближенные методы решения уравнений…………………………….……3

§2. Численные методы решения уравнений…………………………………5

Пункт 1. Метод хорд…………………………………………………...5

Пункт 2. Метод касательных (метод Ньютона)………………………7

Пункт 3. Метод итераций……………………………………………..11

§3. Интерполирование……………………………………………………….14

Пункт 1. Постановка задачи…………………………………………..14

Пункт 2. Конечные и разделенные разности………………………...16

Пункт 3. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона…..18

§4. Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов…………..22

§5. Численное интегрирование……………………………………………..26

Пункт 1. Формулы прямоугольников и трапеций……………………26

Пункт 2. Метод Симпсона…………………….………………………32

§6. Квадратурная формула Гаусса приближенного вычисления

определенного интеграла…………………………………………...34

Литература ……………………………………………………………………36