

Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет  
геодезии и картографии

В.И. Крылов

## **Космическая геодезия и геодинамика**

Практикум по выполнению практических заданий

Москва  
2017

**Рецензенты:**

доктор техн. наук, профессор **В.Н. Баранов**  
(Государственный университет по землеустройству);  
кандидат техн. наук, доцент **О.В. Половнёв**  
(Московский государственный университет геодезии и картографии)

**В.И. Крылов**

Космическая геодезия и геодинамика: Практикум по выполнению практических заданий. — М.: МИИГАиК, 2017, — 35 с.

Для студентов 6 курса специальности 21.05.01— «Прикладная геодезия» (специалитет), обучающихся заочно, а также для других геодезических специальностей.

Электронная версия учебного пособия размещена на сайте библиотеки МИИГАиК <http://library.miiigaik.ru>.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с учебным планом дисциплина «Космическая геодезия и геодинамика» входит в базовую часть дисциплин для подготовки специалистов по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия» (специализация «Инженерная геодезия»).

Студенты факультета дистанционных форм обучения заочного отделения (ФДФО (ЗО)) изучают дисциплину «Космическая геодезия и геодинамика» на шестом курсе. Трудоёмкость дисциплины составляет 11 зачётных единиц или 396 часов. Самостоятельная работа студентов занимает 355 часов. На контактную работу с преподавателем отводится 28 часов, из них 8 часов приходится на лекции и 20 часов – на практические занятия. На контроль усвоения дисциплины отведено 13 часов. В качестве промежуточного контроля усвоения дисциплины предусмотрены контрольные работы, зачёты и экзамены.

Практикум содержит семь заданий, охватывающих основные разделы дисциплины «Космическая геодезия и геодинамика».

Формирование вариантов заданий связано с днём и месяцем рождения студента, а первое задание и с годом его выдачи. Например, если студент родился 29 августа и задания выданы ему в 2017 году, то  $dd = 29$ ,  $mm = 8$ ,  $yyyy = 2017$ .

# СОДЕРЖАНИЕ (ПРОГРАММА) ДИСЦИПЛИНЫ «КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ И ГЕОДИНАМИКА»

## **Раздел 1. Введение**

Предмет и задачи космической геодезии и геодинамики. Роль и значение космической геодезии в решении основных задач наук о Земле. Векторы, входящие в фундаментальное уравнение космической геодезии. Принципы решения фундаментального уравнения динамическим и геометрическим методами космической геодезии.

## **Раздел 2. Системы отсчёта**

Системы координат и времени, применяемые в космической геодезии. Преобразование координат и времени при решении различных задач космической геодезии. Равноденственные истинные и средние координаты; связь между ними. Гринвичские средние и мгновенные координаты; связь между ними. Связь истинных равноденственных и мгновенных гринвичских координат. Общеземная и референчные системы координат; связь между ними. Параметры преобразования между референчной и общеземной системами координат.

## **Раздел 3. Способы наблюдений ИСЗ**

Классификация способов наблюдения ИСЗ. Фотографические наблюдения ИСЗ на фоне звёзд. Общая схема астрометрической обработки фотографических наблюдений ИСЗ способом Тернера. Лазерные наблюдения ИСЗ. Временная задержка сигнала в лазерном способе наблюдений ИСЗ. Доплеровские наблюдения ИСЗ. Доплеровское смещение частоты. Радиодальномерные наблюдения ИСЗ. Временная задержка сигнала в методе радиоинтерферометрии со свехдлинной базой. Общая схема функционирования глобальных спутниковых радионавигационных систем.

## **Раздел 4. Геометрический метод космической геодезии**

Сущность геометрического метода космической геодезии. Синхронизация наблюдений в геометрическом методе космической геодезии. Ориентирующие углы земной хорды. Элементы космических геодезических построений. Определение компонентов вектора пункт-пункт по спутниковым наблюдениям. Определение компонентов вектора пункт-пункт методом РСДБ. Определение компонентов геоцентрического вектора пункта из лазерной локации Луны. Уравнения поправок в геометрическом методе космической геодезии. Выражения для коэффициентов при неизвестных в уравнениях поправок геометрического метода космической геодезии при различном составе измерений. Вычисление свободных членов в

уравнениях поправок геометрического метода космической геодезии для различного состава измерений. Понятие о двухгрупповом методе уравнивания космических геодезических построений. Виды условий, возникающих в космических геодезических построениях.

### **Раздел 5. Теория невозмущённого движения ИСЗ**

Дифференциальные уравнения невозмущённого движения ИСЗ в прямоугольных координатах. Ковариантная форма уравнений движения. Интегралы площадей, энергии, Лапласа, орбиты. Уравнение Кеплера. Первый, второй, третий законы Кеплера. Элементы орбиты ИСЗ. Соотношения между элементами орбиты и постоянными интегрирования.

### **Раздел 6. Теория возмущённого движения ИСЗ**

Дифференциальные уравнения возмущённого движения ИСЗ в прямоугольных координатах и в оскулирующих элементах орбиты. Возмущающие ускорения ИСЗ, вызванные притяжением Луны, Солнца, световым давлением, сопротивлением атмосферы. Возмущающая функция гравитационного поля Земли, приливная возмущающая функция. Понятие об аналитических и численных методах интегрирования дифференциальных уравнений возмущённого движения ИСЗ. Классификация возмущений в элементах орбиты ИСЗ. Возмущения в элементах орбиты ИСЗ от различных факторов.

### **Раздел 7. Динамический метод космической геодезии**

Сущность динамического метода космической геодезии. Уравнения поправок в динамическом методе космической геодезии. Методика вычисления свободных членов в уравнениях поправок динамического метода космической геодезии. Методика вычисления коэффициентов перед неизвестными в уравнениях поправок динамического метода космической геодезии. Спутниковая альтиметрия. Уравнения поправок в методе спутниковой альтиметрии. Наблюдения по линии спутник-спутник. Уравнения связи в межспутниковых наблюдениях. Спутниковая градиентометрия. Инструментальная, локальная и полярная системы координат в методе спутниковой градиентометрии.

### **Раздел 8. Элементы геодинамики**

Краткие сведения о динамике Земли. Наука геодинамика. Геодинамические явления. Тензор и эллипсоид инерции Земли. Статический приливный потенциал. Международные геодинамические проекты.

## ЗАДАНИЕ № 1

### Вычисление средних геоцентрических координат ИСЗ в системе координат стандартной эпохи по его истинным топоцентрическим координатам, заданным в системе координат эпохи наблюдения

#### Постановка задачи и исходные данные

Из обработки наблюдений искусственного спутника Земли на момент всемирного координированного времени  $UTC_1 = 19^h 01^m 56,511^s \text{ dd.mm.уууу}$ . ( $dd$  — номер дня рождения студента в месяце,  $mm$  — номер месяца рождения студента в году,  $уууу$  — номер года выдачи задания) получены истинные топоцентрические координаты ИСЗ (прямое восхождение, склонение, расстояние до спутника)

$$\tilde{\alpha}'_{is} = 17^h dd^m mm,97^s, \quad \tilde{\delta}'_{is} = 63^\circ mm'dd,88'', \quad \tilde{r}'_{is} = 5882645,68 \text{ м}$$

в системе координат эпохи наблюдения.

Требуется вычислить средние геоцентрические координаты ИСЗ ( $\alpha_s, \delta_s, r_s$ ), соответствующие положению средней точки весеннего равноденствия в стандартную эпоху  $J2000.0$ .

Геодезические координаты (геодезическая широта, геодезическая долгота, геодезическая высота)

$$B_i = 44^\circ dd'mm,00'', \quad L_i = 2^h mm^m dd,867^s, \quad H_i = 253,7 \text{ м}$$

пункта земной поверхности заданы относительно референц-эллипсоида с параметрами (большая полуось и сжатие)

$$a_e = 6378245 \text{ м}, \quad f = 1/298,3.$$

Координаты центра референц-эллипсоида

$$\Delta X_0 = 25,0 \text{ м}, \quad \Delta Y_0 = -141,0 \text{ м}, \quad \Delta Z_0 = -80,0 \text{ м}$$

в системе координат общего земного эллипсоида, ориентировка осей координат референцной системы

$$\varepsilon_x = 0,10'', \quad \varepsilon_y = 0,35'', \quad \varepsilon_z = 0,66''$$

относительно системы координат общего земного эллипсоида и масштабный коэффициент  $\beta_0 = 2,5 \cdot 10^{-7}$  заданы.

Координаты мгновенного полюса

$$x_p = -0,0132'', \quad y_p = 0,1664''$$

относительно Международного Условного Начала и поправка за переход от всемирного согласованного времени к всемирному времени  $\Delta UT1 = -0,3994^s$  известны.

### Алгоритм вычислений

1. Вычисляем координаты радиус-вектора пункта  $i$  в референционной системе координат

$$\begin{pmatrix} X_{ref_i} \\ Y_{ref_i} \\ Z_{ref_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i \\ (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i \\ [N_i(1 - e^2) + H_i] \sin B_i \end{pmatrix},$$

где  $N_i = a_e / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i}$  — радиус кривизны нормального сечения первого вертикала;  $e^2 = 2f - f^2$  — квадрат первого эксцентриситета.

2. Вычисляем координаты вектора пункта  $i$  в средней общеземной системе координат

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = (1 + \beta_0) \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{ref_i} \\ Y_{ref_i} \\ Z_{ref_i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычисляем координаты вектора пункта  $i$  в мгновенной общеземной системе координат

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_i \\ \tilde{Y}_i \\ \tilde{Z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем составляющие нутации в долготу  $\Delta\psi$  и наклонности  $\Delta\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Delta\psi = & -17,21'' \sin F_5 + 0,003'' \cos F_5 - 1,32'' \sin 2(F_3 - F_4 + F_5) - \\ & - 0,23'' \sin 2(F_3 + F_5) + 0,21'' \sin 2F_5 + 0,15'' \sin F_2 - \\ & - 0,05'' \sin(F_2 + 2F_3 - 2F_4 + 2F_5) + 0,07'' \sin F_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon = & 9,21'' \cos F_5 + 0,002'' \sin F_5 + 0,57'' \cos 2(F_3 - F_4 + F_5) + \\ & + 0,10'' \cos 2(F_3 + F_5) - 0,09'' \cos 2F_5 + 0,01'' \cos F_2 + \\ & + 0,02'' \cos(F_2 + 2F_3 - 2F_4 + 2F_5), \end{aligned}$$

где  $F_i$  — фундаментальные аргументы Делоне

$$\begin{aligned} F_1 \equiv l = & 134,96340251^\circ + 1717915923,2178''t + 31,8792''t^2 + 0,051635''t^3 - \\ & - 0,00024470''t^4; \end{aligned}$$

$$F_2 \equiv l' = 357,52910918^\circ + 129596581,0481''t + 0,5532''t^2 + 0,000136''t^3 - 0,00001149''t^4; E$$

$$F_3 \equiv F = 93,272090062^\circ + 1739527262,8478''t - 12,7512''t^2 - 0,001037''t^3 + 0,00000417''t^4;$$

$$F_4 \equiv D = 297,85019547^\circ + 1602961601,2090''t - 6,3706''t^2 + 0,006593''t^3 + 0,00003169''t^4;$$

$$F_5 \equiv \Omega = 125,04455501^\circ - 6962890,5431''t + 7,4722''t^2 + 0,007702''t^3 + 0,00005939''t^4;$$

$t = (JD - 2451545,0)/36525$  — промежуток времени в юлианских столетиях от стандартной эпохи до момента наблюдений;

$$JD = 1721013,5 + 367 \cdot \text{уууу} - E \left\{ 7 \left[ \text{уууу} + E((mm + 9)/12) \right] / 4 \right\} +$$

$$+ E(275 \cdot mm/9) + dd + (UT1)^d \text{ — юлианская дата;}$$

$E(x)$  — целая часть числа  $x$ ;

$UT1 = UTC + \Delta UT1$  — момент Всемирного времени.

5. Вычисляем координаты вектора пункта  $i$  в истинной равноденственной системе координат на момент наблюдения

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \\ \tilde{z}_i \end{pmatrix} = W^T \begin{pmatrix} \tilde{X}_i \\ \tilde{Y}_i \\ \tilde{Z}_i \end{pmatrix},$$

где  $W = \begin{pmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  — матрица суточного вращения Земли;

$$S = 6^h 41^m 50,54841^s + 8640184,812866^s t + 0,093104^s t^2 - 6,2^s 10^{-6} t^3 + UT1 + 0,06667 \Delta \psi \cos \varepsilon \text{ — момент гринвичского звёздного времени;}$$

$\varepsilon = 84381448'' - 46,84024''t - 0,00059''t^2 + 0,001813''t^3$  — средний наклон эклиптики к экватору.

6. Вычисляем истинные топоцентрические координаты вектора спутника в равноденственной системе координат на момент наблюдения



$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'_{is} \\ \tilde{y}'_{is} \\ \tilde{z}'_{is} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r}'_{is} \cos \alpha'_{is} \cos \tilde{\delta}'_{is} \\ \tilde{r}'_{is} \sin \alpha'_{is} \cos \tilde{\delta}'_{is} \\ \tilde{r}'_{is} \sin \tilde{\delta}'_{is} \end{pmatrix}.$$

7. Вычисляем истинные геоцентрические координаты вектора спутника  $s$  в равноденственной системе координат на момент наблюдения

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \\ \tilde{z}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \\ \tilde{z}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}'_{is} \\ \tilde{y}'_{is} \\ \tilde{z}'_{is} \end{pmatrix}.$$

8. Вычисляем прецессионные параметры Ньюкома-Андуайе

$$\zeta_A = 2,5976176'' + 2306,0809506''t + 0,3019015''t^2 + 0,0179663''t^3 - 0,0000327''t^4 - 0,0000002''t^5$$

$$\theta_A = 2004,1917476''t - 0,4269353''t^2 - 0,0418251''t^3 - 0,0000601''t^4 - 0,0000001''t^5.$$

$$Z_A = -2,5976176'' + 2306,0803226''t + 1,0947790''t_2 + 0,0182273''t^3 + 0,0000470''t^4 - 0,0000003''t^5$$

9. Формируем матрицы прецессии и нутации

$$P = R_3(-Z_A)R_2(\theta_A)R_3(-\zeta_A);$$

$$N = R_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon)R_3(-\Delta\Psi)R_1(\varepsilon),$$

$$\text{где } R_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$R_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Вычисляем средние геоцентрические координаты вектора спутника  $s$  в равноденственной системе координат на стандартную эпоху  $J2000.0$

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = P^T N^T \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \\ \tilde{z}_s \end{pmatrix}.$$

11. Вычисляем полярные средние геоцентрические координаты спутника  $s$  в равноденственной системе координат на стандартную эпоху  $J2000.0$

$$\alpha_s = \arctg \frac{y_s}{x_s};$$

$$\delta_s = \arctg \frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}};$$

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}.$$

## ЗАДАНИЕ № 2

### Вычисление элементов невозмущённой орбиты по наблюдениям спутника с пункта земной поверхности

#### Постановка задачи

Пусть с пункта земной поверхности, координаты которого известны, выполнены наблюдения искусственного спутника Земли и определены топоцентрические направления и расстояния до трёх его мгновенных положений. В результате обработки этих данных вычислены геоцентрические прямоугольные координаты положений ИСЗ. Требуется вычислить элементы орбиты спутника. Для решения подобной задачи разработано много методов определения орбит. Наиболее широко используемым является классический метод Гаусса. Здесь приводится алгоритм модифицированного метода Гаусса.

#### Исходные данные

№ варианта	Момент времени, с	Координаты ИСЗ в равноденственной системе координат, м		
		x	y	z
1	0	-6662728,915	1577513,095	3689276,000
	120	-7062483,517	1196770,711	3031564,267
	240	-7376184,744	801445,953	2336912,946
2	0	9151804,816	3383704,248	5507903,577
	120	8720959,022	3665290,369	6007144,890
	240	8254553,329	3931931,322	6481892,168
3	0	-9572849,511	9178349,804	20597123,981
	120	-10016322,150	9082709,836	20428060,924
	240	-10455884,323	8983523,894	20251022,560
4	0	-41061388,755	-2112567,611	1954505,021
	120	-41041305,330	-2485298,627	1943523,154
	240	-41017844,241	-2857825,105	1932381,337
5	0	-2038180,783	2407252,931	-7261470,056
	120	-2510389,522	1700870,949	-7313982,410
	240	-2953596,278	974838,617	-7281997,201
6	0	-1846436,379	-6756507,109	8526689,395
	120	-1152495,551	-6963444,758	8492841,123
	240	-453643,050	-7140713,008	8422806,630

7	0	-9328466,455	-23290495,355	-6120733,281
	120	-9028977,004	-23310043,220	-6484368,805
	240	-8726478,645	-23321823,012	-6845843,412
8	0	-16457705,850	12754177,768	-31508562,356
	120	-16524037,431	12504839,969	-31620038,712
	240	-16588613,679	12254173,777	-31728156,101
9	0	-3980385,455	-1958097,099	5124784,247
	120	-3757228,545	-2817825,853	4886393,996
	240	-3464904,324	-3625680,154	4558049,441
10	0	-3900399,419	2383943,271	5008228,345
	120	-4078611,839	1503502,310	5203495,728
	240	-4181833,559	595418,109	5303089,949
11	0	396909,262	-5917368,361	3315788,804
	120	1064148,745	-6133564,451	2723130,202
	240	1711947,101	-6237704,992	2080722,022
12	0	-4214290,282	65245,752	5309690,341
	120	-4145374,195	-851560,700	5295249,205
	240	-4000182,993	-1752697,616	5183375,130
13	0	-3555960,391	877738,870	-11723422,162
	120	-4156532,259	610164,021	-11539558,029
	240	-4744225,266	340698,684	-11319939,428
14	0	-3944800,767	-7377882,278	-8978229,698
	120	-4317145,204	-7711073,385	-8511742,732
	240	-4676078,216	-8020309,757	-8018813,959
15	0	-4688980,289	-11060428,914	2389814,750
	120	-4849852,566	-10832793,563	3015714,286
	240	-4995570,693	-10571309,594	3632190,556
16	0	22167190,671	11659028,078	-4753144,779
	120	21992226,911	11813615,198	-5166381,542
	240	21809644,535	11964109,809	-5577828,552
17	0	16356782,519	-38888572,526	-460576,770
	120	16695951,404	-38744069,369	-467120,954
	240	17033844,288	-38596605,166	-473629,437

18	0	2681845,036	-8325484,917	-1856687,687
	120	2489767,021	-8193866,799	-2624962,996
	240	2277814,214	-7996843,889	-3372351,085
19	0	2532193,512	-8135657,539	-5151203,820
	120	2133541,277	-7876688,405	-5743995,139
	240	1722569,941	-7572247,112	-6303631,483
20	0	1889254,451	-6371638,681	-8150806,351
	120	1402745,494	-5998603,184	-8359845,535
	240	909371,685	-5596222,768	-8927016,627
21	0	7401681,472	-961017,997	-8245351,529
	120	7072492,571	-448584,090	-8616351,138
	240	6714075,136	65706,785	-8951746,772
22	0	-10022482,695	1598612,952	7108425,669
	120	-10413293,859	1311796,800	6648222,707
	240	-10772939,701	1021054,094	6168123,737
23	0	-10022482,695	1598612,952	7108425,669
	120	-10413293,859	1311796,800	6648222,707
	240	-10772939,701	1021054,094	6168123,737
24	0	-6604045,785	-325470,447	2898987,020
	120	-6830501,908	-892777,921	2219738,343
	240	-6946330,097	-1446595,362	1506919,191
25	0	-6912028,391	481981,639	2579151,224
	120	-7156165,085	-23178,325	1878371,679
	240	-7299015,458	-528013,808	1151000,772
26	0	-7202175,123	746414,422	2194514,755
	120	-7416748,148	277644,365	1477108,831
	240	-7533206,917	-194799,832	740160,616
27	0	7584874,466	2015165,187	-34055,276
	120	7444719,695	2366335,048	735790,273
	240	7216193,812	2689415,352	1496900,908
28	0	-16284086,661	-7418319,852	-34355272,947
	120	-16180159,211	-7610444,709	-34173764,251
	240	-16074613,021	-7801808,136	-33988836,645

29	0	10048880,468	24872178,077	26046,428
	120	9801229,299	24967606,432	404955,519
	240	9550663,894	25055611,075	783744,202
30	0	2298527,388	-10920826,560	5166112,858
	120	2696503,116	-10607848,079	5618721,489
	240	3086170,184	-10262182,723	6054017,066
31	0	-2965651,234	-7245899,093	13209,828
	120	-2670649,675	-7315113,520	813120,682
	240	-2343743,828	-7296939,985	1603318,016

**Формирование варианта задания.** Номер варианта соответствует номеру дня в месяце рождения студента.

### *Алгоритм вычислений*

1. Вычисляем геоцентрические прямые восхождения, склонения и модули векторов ИСЗ для трёх его положений

$$\alpha_s = \arctg \frac{y_s}{x_s};$$

$$\delta_s = \arctg \frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}};$$

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}, s = 1, 2, 3.$$

2. Вычисляем угол наклона плоскости орбиты ИСЗ к плоскости экватора Земли по формуле

$$\cos i = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{\sqrt{(y_1 z_3 - y_3 z_1)^2 + (x_3 z_1 - x_1 z_3)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2}}.$$

3. Вычисляем долготу восходящего узла орбиты ИСЗ, используя формулы

$$\sin(\alpha_1 - \Omega) = \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \delta_1;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} \delta_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\operatorname{tg} \delta_3 - \operatorname{tg} \delta_1 \cos(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

4. Вычисляем значения аргументов широты для трёх положений ИСЗ

$$\cos u_s = \cos(\alpha_s - \Omega) \cos \delta_s;$$

$$\sin u_s = \frac{\sin \delta_s}{\sin i}, \quad s = 1, 2, 3.$$

Вычисляем фокальный параметр

$$p = \frac{r_1 [\sin(u_3 - u_1) + \sin(u_1 - u_2) + \sin(u_2 - u_3)]}{\sin(u_2 - u_3) + \frac{r_1}{r_2} \sin(u_3 - u_1) + \frac{r_1}{r_3} \sin(u_1 - u_2)}.$$

5. Вычисляем истинную аномалию для первого положения ИСЗ, используя формулы

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\frac{p-r_1}{r_1} \cos(u_2 - u_1) - \frac{p-r_2}{r_2}}{\frac{p-r_1}{r_1} \sin(u_2 - u_1)};$$

$$\operatorname{sign}(e \cos \vartheta_1) = \operatorname{sign}\left(\frac{p-r_1}{r_1}\right).$$

6. Вычисляем эксцентриситет орбиты

$$e = \frac{p-r_1}{r_1 \cos \vartheta_1}.$$

7. Вычисляем аргумент перицентра

$$\omega = u_1 - \vartheta_1.$$

8. Вычисляем большую полуось орбиты

$$a = \frac{p}{1-e^2}.$$

9. Вычисляем среднее движение

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}},$$

где  $\mu = 3,9860044 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$  — геоцентрическая гравитационная постоянная.

10. Вычисляем эксцентрическую аномалию ИСЗ для его первого положения по формулам

$$\cos \frac{+ \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta};$$
$$\sin \frac{\sqrt{1 - \cos \vartheta}}{1 + \cos \vartheta}.$$

11. Вычисляем момент предшествующего прохождения ИСЗ через перигеум

$$\tau = t_1 - \frac{E_1 - e \sin E_1}{n}.$$

12. Вычисляем значение средней аномалии на момент времени  $t_1$

$$M_1 = n(t_1 - \tau).$$



### ЗАДАНИЕ № 3

## Вычисление невозмущённой эфемериды ИСЗ

### *Постановка задачи и исходные данные*

В качестве исходных данных студент использует элементы орбиты  $a, e, i, \Omega, \omega, M_1$  в момент  $t_1$ , вычисленные в задании № 2. Требуется на заданный момент времени  $t = t_1 + 3^h$  вычислить прямоугольные координаты  $x, y, z$  и составляющие скорости движения искусственного спутника Земли  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ .

### *Алгоритм вычислений*

1. Вычисляем среднее движение ИСЗ

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}},$$

где  $\mu$  — геоцентрическая гравитационная постоянная.

2. Вычисляем среднюю аномалию на заданный момент времени  $t$

$$M = M_1 + n(t - t_1).$$

3. Задавшись точностью вычислений  $\varepsilon$ , методом последовательных приближений вычисляем эксцентрическую аномалию

$$E_0 = M + e \sin M;$$

$$E_k = M + e \sin E_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Вычисления прекращаем, когда  $|E_k - E_{k-1}| < \varepsilon = 0,0000001^\circ$ .

4. Вычисляем истинную аномалию

$$\vartheta = +2 \operatorname{arctg} \left( \frac{e \sin E}{1 + \sqrt{1 - e} - e \cos E} \right).$$

5. Вычисляем аргумент широты

$$u = \omega + \vartheta.$$

6. Вычисляем геоцентрическое расстояние до спутника

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \vartheta}.$$

7. Вычисляем прямоугольные координаты спутника

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i \\ \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix}.$$

8. Вычисляем составляющие скорости спутника

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i \\ \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) \begin{pmatrix} -\cos \Omega \sin u - \sin \Omega \cos u \cos i \\ -\sin \Omega \sin u + \cos \Omega \cos u \cos i \\ \cos u \sin i \end{pmatrix}.$$

## ЗАДАНИЕ № 4

### Вычисление элементов орбиты ИСЗ по его координатам и составляющим скорости движения в момент $t$

#### *Постановка задачи и исходные данные*

На момент времени  $t$  заданы координаты  $x, y, z$  и составляющие скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  искусственного спутника Земли. Требуется вычислить элементы орбиты  $a, e, i, \Omega, \omega, M$  на тот же момент времени. В качестве исходных данных студент использует результаты, полученные в задании № 3.

#### *Алгоритм вычислений*

1. Вычисляем постоянные площадей

$$c_1 = y\dot{z} - \dot{y}z;$$

$$c_2 = \dot{x}z - x\dot{z};$$

$$c_3 = x\dot{y} - \dot{x}y;$$

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

2. Вычисляем фокальный параметр

$$p = \frac{c^2}{\mu}.$$

$\mu$  — геоцентрическая гравитационная постоянная.

3. Вычисляем угол наклона плоскости орбиты к плоскости экватора

$$i = \arccos\left(\frac{c_3}{c}\right).$$

4. С помощью формул

$$\sin \Omega = \frac{c_1}{c \sin i};$$

$$\cos \Omega = -\frac{c_2}{c \sin i}$$

вычисляем долготу восходящего узла  $\Omega$ .

5. Вычисляем квадрат скорости спутника и геоцентрическое расстояние до спутника

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

6. Вычисляем постоянную энергии

$$h = v^2 - \frac{2\mu}{r}.$$

7. Вычисляем большую полуось орбиты спутника

$$a = -\frac{\mu}{h}.$$

8. Вычисляем составляющие вектора Лапласа

$$f_1 = \dot{D}x - D\dot{x};$$

$$f_2 = \dot{D}y - D\dot{y};$$

$$f_3 = \dot{D}z - D\dot{z};$$

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2},$$

где

$$D = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z};$$

$$\dot{D} = \frac{\mu}{r} + h.$$

9. Вычисляем эксцентриситет орбиты спутника по одной из формул

$$e = \frac{f}{\mu};$$

$$e = \sqrt{\frac{a-p}{a}}.$$

10. На основании формул

$$\sin \omega = \frac{f_3}{f \sin i};$$

$$\cos \omega = \frac{f_1 \cos \Omega + f_2 \sin \Omega}{f}$$

вычисляем аргумент перицентра  $\omega$ .

11. С помощью формул

$$\cos \vartheta = \frac{p-r}{er},$$

$$\sin \vartheta = \frac{D}{er} \sqrt{\frac{p}{\mu}}$$

вычисляем истинную аномалию  $\vartheta$ .

12. С помощью формул

$$\cos E = \frac{e + \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta},$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}$$

вычисляем эксцентрическую аномалию  $E$ .

13. Вычисляем среднюю аномалию

$$M = E - e \sin E.$$

## ЗАДАНИЕ № 5

### Вычисление ориентирующих углов земной хорды по наблюдениям спутника с двух пунктов земной поверхности

#### Постановка задачи

При выполнении вычислений по определению компонентов вектора пункт-пункт необходимо располагать их приближёнными значениями.

Вычисление этих значений можно осуществить на основе элементарной фигуры. Элементарной фигурой называется построение, состоящее из необходимого числа измерений.

При вычислении ориентирующих углов земной хорды по измеренным направлениям пункт-спутник, выполненным синхронно с обоих пунктов, элементарной будет фигура, состоящая из двух треугольников. В этом случае задача по определению ориентирующих углов хорды (единичного вектора пункт-пункт) сводится к троекратному вычислению векторных произведений соответствующих единичных векторов (метод Вайсяля).

#### Исходные данные

№	$S_0$	UT1	$\alpha'_{is}$	$\delta'_{is}$	$\alpha'_{js}$	$\delta'_{js}$
1	13 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 40,696 <sup>s</sup>	19 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 59,994 <sup>s</sup>	229°54'31,83"	54°19'18,15"	147°54'21,61"	15°08'21,38"
2	13 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 40,696 <sup>s</sup>	19 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 11,994 <sup>s</sup>	232°33'53,94"	57°05'03,75"	145°44'40,56"	17°36'44,24"
3	13 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 40,696 <sup>s</sup>	19 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 23,994 <sup>s</sup>	235°38'04,72"	59°44'00,31"	143°25'37,79"	20°08'05,34"
4	13 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 37,258 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> 59,994 <sup>s</sup>	211°46'22,22"	38°48'44,20"	153°43'20,62"	-0°58'54,51"
5	13 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 37,258 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 03 <sup>m</sup> 11,994 <sup>s</sup>	212°34'09,05"	42°20'30,67"	152°14'41,06"	0°48'08,23"
6	13 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 37,258 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 03 <sup>m</sup> 23,994 <sup>s</sup>	213°30'11,44"	45°54'20,22"	150°41'09,72"	2°38'58,98"
7	13 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> 33,818 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> 59,994 <sup>s</sup>	198°12'56,45"	56°11'22,63"	144°13'15,72"	03°13'30,96"
8	13 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 30,375 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup> 59,994 <sup>s</sup>	105°19'54,36"	77°51'29,60"	126°10'12,65"	15°04'33,56"
9	13 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 30,375 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 07,994 <sup>s</sup>	96°32'50,15"	77°51'09,00"	124°46'56,34"	16°08'20,46"
10	13 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 30,375 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup> 19,994 <sup>s</sup>	84°27'34,83"	77°22'58,17"	122°39'13,91"	17°42'24,61"
11	13 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 30,375 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 07,994 <sup>s</sup>	39°03'24,32"	65°44'03,55"	101°45'24,30"	29°13'45,10"
12	13 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 30,375 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 23,994 <sup>s</sup>	36°44'39,74"	64°03'04,32"	98°33'11,44"	30°24'45,12"
13	14 <sup>h</sup> 12 <sup>m</sup> 16,577 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 08 <sup>m</sup> 59,991 <sup>s</sup>	228°51'35,90"	55°28'45,34"	155°27'48,09"	10°28'17,25"
14	14 <sup>h</sup> 12 <sup>m</sup> 16,577 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 09 <sup>m</sup> 11,991 <sup>s</sup>	230°52'04,14"	58°41'42,90"	153°31'38,60"	12°37'24,25"
15	14 <sup>h</sup> 12 <sup>m</sup> 16,577 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 09 <sup>m</sup> 19,991 <sup>s</sup>	232°25'26,40"	60°47'18,93"	152°10'27,64"	14°05'02,24"
16	14 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup> 13,126 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup> 59,991 <sup>s</sup>	215°28'24,37"	74°03'15,29"	144°26'38,28"	14°18'53,23"
17	14 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup> 13,126 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 07,991 <sup>s</sup>	216°38'11,60"	76°15'09,67"	143°01'06,91"	15°36'29,41"
18	14 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup> 13,126 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 15,991 <sup>s</sup>	218°12'39,51"	78°22'48,13"	141°33'12,09"	16°53'58,76"
19	14 <sup>h</sup> 59 <sup>m</sup> 35,252 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 18 <sup>m</sup> 59,992 <sup>s</sup>	249°27'37,00"	53°22'08,50"	175°52'13,30"	14°29'38,49"
20	14 <sup>h</sup> 59 <sup>m</sup> 35,252 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup> 07,992 <sup>s</sup>	250°43'53,19"	55°15'05,96"	174°37'30,56"	15°59'59,07"

21	14 <sup>h</sup> 59 <sup>m</sup> 35,252 <sup>s</sup>	20 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup> 11,992 <sup>s</sup>	251°24'58,91"	56°10'57,58"	173°58'57,78"	16°45'43,41"
22	20 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 32,325 <sup>s</sup>	22 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 00,031 <sup>s</sup>	1°04'49,95"	54°08'39,41"	299°53'18,73"	17°14'16,19"
23	20 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 32,325 <sup>s</sup>	22 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 08,031 <sup>s</sup>	1°47'11,47"	55°52'08,04"	298°51'04,70"	18°28'28,78"
24	20 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 32,325 <sup>s</sup>	22 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 16,031 <sup>s</sup>	2°34'03,18"	57°35'06,35"	297°46'32,46"	19°43'31,41"
25	20 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 32,325 <sup>s</sup>	22 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 24,031 <sup>s</sup>	3°26'06,71"	59°17'18,98"	296°39'30,90"	20°59'21,31"
26	21 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> 18,579 <sup>s</sup>	22 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 00,032 <sup>s</sup>	18°01'12,21"	38°50'02,66"	324°59'14,00"	17°17'51,77"
27	21 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> 18,579 <sup>s</sup>	22 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 08,032 <sup>s</sup>	18°43'11,88"	40°05'38,30"	324°19'55,79"	18°40'10,55"
28	21 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> 18,579 <sup>s</sup>	22 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 16,032 <sup>s</sup>	19°27'38,94"	41°21'25,33"	323°38'41,17"	20°04'39,51"
29	21 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> 01,349 <sup>s</sup>	23 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 00,035 <sup>s</sup>	229°55'43,23"	73°36'53,43"	274°48'02,50"	27°30'06,32"
30	21 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> 01,349 <sup>s</sup>	23 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 08,035 <sup>s</sup>	226°03'41,32"	73°01'18,35"	273°22'53,28"	28°13'26,33"
31	21 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> 01,349 <sup>s</sup>	23 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 16,035 <sup>s</sup>	222°33'27,76"	72°22'51,24"	271°56'54,48"	28°55'19,39"
32	21 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> 01,349 <sup>s</sup>	23 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 20,035 <sup>s</sup>	220°56'07,78"	72°02'45,37"	271°13'31,91"	29°15'42,98"

**Формирование варианта задания.** Каждый студент выбирает данные из двух строк таблицы «Исходные данные». Номер первой строки соответствует номеру дня рождения, номер второй строки соответствует номеру месяца рождения. В случае, если эти номера совпадают, то данные для второй строки студент выбирает из последней (тридцать второй) строки таблицы.

### *Алгоритм вычислений*

1. Вычисляем момент гринвичского звёздного времени для первого наблюдения ИСЗ

$$S_1 = S_{0_1} + 1,00274 \cdot UT1_1.$$

2. Вычисляем направляющие косинусы вектора пункт – спутник с обоих пунктов  $i$  и  $j$  на первый момент времени наблюдения ИСЗ

$$L'_{i1} = \cos(\alpha'_{i1} - S_1) \cos \delta'_{i1}; M'_{i1} = \sin(\alpha'_{i1} - S_1) \cos \delta'_{i1}; N'_{i1} = \sin \delta'_{i1};$$

$$L'_{j1} = \cos(\alpha'_{j1} - S_1) \cos \delta'_{j1}; M'_{j1} = \sin(\alpha'_{j1} - S_1) \cos \delta'_{j1}; N'_{j1} = \sin \delta'_{j1}.$$

3. Вычисляем момент гринвичского звёздного времени для второго наблюдения ИСЗ

$$S_2 = S_{0_2} + 1,00274 \cdot UT1_2.$$

4. Вычисляем направляющие косинусы направлений пункт – спутник с обоих пунктов  $i$  и  $j$  на второй момент времени наблюдения ИСЗ

$$L'_{i2} = \cos(\alpha'_{i2} - S_2) \cos \delta'_{i2}; M'_{i2} = \sin(\alpha'_{i2} - S_2) \cos \delta'_{i2}; N'_{i2} = \sin \delta'_{i2};$$

$$L'_{j2} = \cos(\alpha'_{j2} - S_2) \cos \delta'_{j2}; M'_{j2} = \sin(\alpha'_{j2} - S_2) \cos \delta'_{j2}; N'_{j2} = \sin \delta'_{j2}.$$

5. Вычисляем направляющие косинусы вектора, перпендикулярного синхронной плоскости, соответствующей первому моменту времени наблюдения ИСЗ

$$L'_{ij1} = \frac{M'_{i1}N'_{j1} - M'_{j1}N'_{i1}}{\sqrt{1 - (L_{i1}^2L_{j1}^2 + M_{i1}^2M_{j1}^2 + N_{i1}^2N_{j1}^2)^2}};$$

$$M'_{ij1} = \frac{L'_{j1}N'_{i1} - L'_{i1}N'_{j1}}{\sqrt{1 - (L_{i1}^2L_{j1}^2 + M_{i1}^2M_{j1}^2 + N_{i1}^2N_{j1}^2)^2}};$$

$$N'_{ij1} = \frac{L'_{i1}M'_{j1} - L'_{j1}M'_{i1}}{\sqrt{1 - (L_{i1}^2L_{j1}^2 + M_{i1}^2M_{j1}^2 + N_{i1}^2N_{j1}^2)^2}}.$$

6. Вычисляем направляющие косинусы вектора, перпендикулярного синхронной плоскости, соответствующей второму моменту времени наблюдения ИСЗ

$$L'_{ij2} = \frac{M'_{i2}N'_{j2} - M'_{j2}N'_{i2}}{\sqrt{1 - (L_{i2}^2L_{j2}^2 + M_{i2}^2M_{j2}^2 + N_{i2}^2N_{j2}^2)^2}};$$

$$M'_{ij2} = \frac{L'_{j2}N'_{i2} - L'_{i2}N'_{j2}}{\sqrt{1 - (L_{i2}^2L_{j2}^2 + M_{i2}^2M_{j2}^2 + N_{i2}^2N_{j2}^2)^2}};$$

$$N'_{ij2} = \frac{L'_{i2}M'_{j2} - L'_{j2}M'_{i2}}{\sqrt{1 - (L_{i2}^2L_{j2}^2 + M_{i2}^2M_{j2}^2 + N_{i2}^2N_{j2}^2)^2}}.$$

7. Вычисляем направляющие косинусы вектора пункт-пункт (земная хорда)

$$L'_{ij} = \frac{M'_{i1}N'_{j2} - M'_{j2}N'_{i1}}{\sqrt{1 - (L_{i1}^2L_{j2}^2 + M_{i1}^2M_{j2}^2 + N_{i1}^2N_{j2}^2)^2}};$$

$$M'_{ij} = \frac{L'_{j2}N'_{i1} - L'_{i1}N'_{j2}}{\sqrt{1 - (L_{i1}^2L_{j2}^2 + M_{i1}^2M_{j2}^2 + N_{i1}^2N_{j2}^2)^2}};$$

$$N'_{ij} = \frac{L'_{i1}M'_{j2} - L'_{j2}M'_{i1}}{\sqrt{1 - (L_{i1}^2L_{j2}^2 + M_{i1}^2M_{j2}^2 + N_{i1}^2N_{j2}^2)^2}}.$$



Вычисляем ориентирующие углы земной хорды

$$\Lambda'_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{M'_{ij}}{L'_{ij}};$$

$$\Phi'_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{N'_{ij}}{\sqrt{L_{ij}^2 + M_{ij}'^2}}.$$

## ЗАДАНИЕ № 6

### Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений возмущённого движения ИСЗ

#### Постановка задачи

Задана система дифференциальных уравнений возмущённого движения ИСЗ вида:

$$\ddot{x} = f(x, y, z); f(x, y, z) = -\mu \frac{x}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{a_e^2}{r^5} \left( \frac{5xz^2}{r^2} - x \right);$$

$$\ddot{y} = \varphi(x, y, z); \varphi(x, y, z) = -\mu \frac{y}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{a_e^2}{r^5} \left( \frac{5yz^2}{r^2} - y \right);$$

$$\ddot{z} = \psi(x, y, z); \psi(x, y, z) = -\mu \frac{z}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{a_e^2}{r^5} \left( \frac{5z^3}{r^2} - 3z \right).$$

с начальными условиями интегрирования  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0$ .

Требуется вычислить координаты и составляющие скорости ИСЗ в конце первого шага  $H$  интегрирования. Шаг интегрирования принять равным  $60^s$ .

#### Исходные данные

№	$t_0, c$	$x_0, M$	$y_0, M$	$z_0, M$	$\dot{x}_0, MC^{-1}$	$\dot{y}_0, MC^{-1}$	$\dot{z}_0, MC^{-1}$
1	0	-2965651,234	-7245899,093	13209,828	2315,326	-939,364	6679,888
2	120	-2670631,355	-7315067,024	813115,347	2596,757	-212,307	6638,540
3	240	-2343674,442	-7296757,298	1603276,591	2847,079	517,138	6517,652
4	360	-1988696,673	-7191208,382	2374228,391	3063,307	1240,226	6318,710
5	480	-1609948,106	-6999703,908	3116740,713	3242,867	1948,301	6044,142
6	600	-1211961,067	-6724555,553	3821929,414	3383,632	2632,902	5697,278
7	720	-799495,344	-6369073,405	4481362,196	3483,942	3285,867	5282,310
8	840	-377480,932	-5937524,389	5087158,463	3542,622	3899,426	4804,232
9	960	49040,891	-5435079,513	5632081,926	3558,994	4466,295	4268,777
10	1080	474977,409	-4867750,786	6109624,971	3532,879	4979,755	3682,343
11	1200	895244,516	-4242318,783	6514083,993	3464,598	5433,727	3051,919
12	1320	1304826,292	-3566251,856	6840625,037	3354,966	5822,837	2384,997
13	1440	1698833,506	-2847618,015	7085339,265	3205,277	6142,473	1689,487
14	1560	2072560,443	-2094990,495	7245287,853	3017,293	6388,834	973,632
15	1680	2421539,574	-1317348,014	7318536,056	2793,217	6558,970	245,909
16	1800	2741593,553	-523970,679	7304176,215	2535,678	6650,812	-485,058
17	1920	3028884,101	275667,484	7202339,549	2247,695	6663,200	-1210,593
18	2040	3279957,332	1072008,447	7014196,598	1932,648	6595,897	-1922,066
19	2160	3491785,068	1855521,557	6741946,210	1594,246	6449,596	-2610,985
20	2280	3661801,721	2616815,368	6388793,013	1236,484	6225,923	-3269,095

21	2400	3787936,268	3346748,864	5958913,328	863,603	5927,424	-3888,472
22	2520	3868638,885	4036540,903	5457409,605	480,039	5557,547	-4461,620
23	2640	3902901,788	4677876,661	4890253,519	90,381	5120,610	-4981,564
24	2760	3890273,856	5263009,754	4264218,063	-300,689	4621,760	-5441,938
25	2880	3830868,665	5784858,636	3586798,931	-688,453	4066,922	-5837,075
26	3000	3725365,605	6237095,876	2866126,427	-1068,209	3462,727	-6162,081
27	3120	3575003,877	6614228,869	2110867,865	-1435,337	2816,444	-6412,908
28	3240	3381569,251	6911670,629	1330122,519	-1785,359	2135,882	-6586,415
29	3360	3147373,601	7125799,403	533309,926	-2113,994	1429,302	-6680,413
30	3480	2875227,405	7254005,991	-269946,745	-2417,222	705,302	-6693,700
31	3600	2568405,503	7294727,903	-1069940,572	-2691,333	-27,292	-6626,084

**Формирование варианта задания.** Исходные данные студент выбирает из строки, номер которой соответствует номеру его дня рождения.

### Алгоритм вычислений

1. Вычисляем правые части дифференциальных уравнений

$$f_0 = -\mu \frac{x_0}{r_0^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{a_e^2}{r_0^5} \left( \frac{5x_0 z_0^2}{r_0^2} - x_0 \right);$$

$$\Phi_0 = -\mu \frac{y_0}{r_0^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{a_e^2}{r_0^5} \left( \frac{5y_0 z_0^2}{r_0^2} - y_0 \right);$$

$$\Psi_0 = -\mu \frac{z_0}{r_0^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{a_e^2}{r_0^5} \left( \frac{5z_0^3}{r_0^2} - 3z_0 \right);$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2};$$

$$\mu = 3,9860044 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2};$$

$$J_2 = 0,001082636;$$

$$a_e = 6378136 \text{ м.}$$

2. Вычисляем в первом приближении координаты ИСЗ в подшагах

$$x_k^{(1)} = x_0 + \alpha_k H \dot{x}_0 + \frac{1}{2} \alpha_k^2 H^2 f_0;$$

$$y_k^{(1)} = y_0 + \alpha_k H \dot{y}_0 + \frac{1}{2} \alpha_k^2 H^2 \Phi_0;$$

$$z_k^{(1)} = z_0 + \alpha_k H \dot{z}_0 + \frac{1}{2} \alpha_k^2 H^2 \Psi_0;$$

$$k = 1, 2, 3;$$

$$\alpha_1 = 0,212340538;$$

$$\alpha_2 = 0,590533136;$$

$$\alpha_3 = 0,911412040;$$

$$H = 60^s.$$

3. Вычисляем в первом приближении значения правых частей в подшагах

$$f_k^{(1)} = f(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}, z_k^{(1)});$$

$$\varphi_k^{(1)} = \varphi(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}, z_k^{(1)});$$

$$\psi_k^{(1)} = \psi(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}, z_k^{(1)}).$$

4. Вычисляем в первом приближении  $p, q, r$

$$\begin{pmatrix} p_1^{(1)} & q_1^{(1)} & r_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} & q_2^{(1)} & r_2^{(1)} \\ p_3^{(1)} & q_3^{(1)} & r_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1^{(1)} - f_0 & \varphi_1^{(1)} - \varphi_0 & \psi_1^{(1)} - \psi_0 \\ f_2^{(1)} - f_0 & \varphi_2^{(1)} - \varphi_0 & \psi_2^{(1)} - \psi_0 \\ f_3^{(1)} - f_0 & \varphi_3^{(1)} - \varphi_0 & \psi_3^{(1)} - \psi_0 \end{pmatrix}.$$

5. Вычисляем во втором приближении координаты ИСЗ в подшагах

$$x_k^{(2)} = x_0 + \alpha_k H \dot{x}_0 + \frac{1}{2} \alpha_k^2 H^2 f_0 + \alpha_k^2 H^2 \left( \frac{1}{6} \alpha_k p_1^{(1)} + \frac{1}{12} \alpha_k^2 p_2^{(1)} + \frac{1}{20} \alpha_k^3 p_3^{(1)} \right);$$

$$y_k^{(2)} = y_0 + \alpha_k H \dot{y}_0 + \frac{1}{2} \alpha_k^2 H^2 \varphi_0 + \alpha_k^2 H^2 \left( \frac{1}{6} \alpha_k q_1^{(1)} + \frac{1}{12} \alpha_k^2 q_2^{(1)} + \frac{1}{20} \alpha_k^3 q_3^{(1)} \right);$$

$$z_k^{(2)} = z_0 + \alpha_k H \dot{z}_0 + \frac{1}{2} \alpha_k^2 H^2 \psi_0 + \alpha_k^2 H^2 \left( \frac{1}{6} \alpha_k r_1^{(1)} + \frac{1}{12} \alpha_k^2 r_2^{(1)} + \frac{1}{20} \alpha_k^3 r_3^{(1)} \right).$$

6. Вычисляем во втором приближении значения правых частей в подшагах

$$f_k^{(2)} = f(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}, z_k^{(2)});$$

$$\varphi_k^{(2)} = \varphi(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}, z_k^{(2)});$$

$$\psi_k^{(2)} = \psi(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}, z_k^{(2)}).$$

7. Вычисляем во втором приближении  $p, q, r$

$$\begin{pmatrix} p_1^{(2)} & q_1^{(2)} & r_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} & q_2^{(2)} & r_2^{(2)} \\ p_3^{(2)} & q_3^{(2)} & r_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1^{(2)} - f_0 & \varphi_1^{(2)} - \varphi_0 & \psi_1^{(2)} - \psi_0 \\ f_2^{(2)} - f_0 & \varphi_2^{(2)} - \varphi_0 & \psi_2^{(2)} - \psi_0 \\ f_3^{(2)} - f_0 & \varphi_3^{(2)} - \varphi_0 & \psi_3^{(2)} - \psi_0 \end{pmatrix}.$$

8. Процесс приближений продолжаем до тех пор, пока  $p, q, r$  не стабилизируются. После стабилизации  $p, q, r$  решение в конце шага будет

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + Hf_0 + H\left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{4}p_3\right);$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + H\varphi_0 + H\left(\frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{3}q_2 + \frac{1}{4}q_3\right);$$

$$\dot{z} = \dot{z}_0 + H\psi_0 + H\left(\frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{3}r_2 + \frac{1}{4}r_3\right);$$

$$x = x_0 + H\dot{x}_0 + \frac{1}{2}H^2f_0 + H^2\left(\frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{12}p_2 + \frac{1}{20}p_3\right);$$

$$y = y_0 + H\dot{y}_0 + \frac{1}{2}H^2\varphi_0 + H^2\left(\frac{1}{6}q_1 + \frac{1}{12}q_2 + \frac{1}{20}q_3\right);$$

$$z = z_0 + H\dot{z}_0 + \frac{1}{2}H^2\psi_0 + H^2\left(\frac{1}{6}r_1 + \frac{1}{12}r_2 + \frac{1}{20}r_3\right).$$

## ЗАДАНИЕ № 7

### Вычисление координат земного полюса по наблюдениям квазаров

#### *Краткая теория метода*

Уравнение связи в методе радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ) имеет вид:

$$c\tau = \Delta X L + \Delta Y M + \Delta Z N + x_p (\Delta X N - \Delta Z L) + y_p (\Delta Z M - \Delta Y N),$$

где  $c$  — скорость света;  $\tau$  — временная задержка, фиксирующая разность моментов прихода шумовой волны от квазара на две антенны РСДБ;  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  — разности координат станций, образующих базу РСДБ;  $L = \cos \gamma \cos \delta, M = \sin \gamma \cos \delta, N = \sin \delta$  — направляющие косинусы геоцентрического вектора квазара;  $\gamma, \delta$  — сферические координаты квазара в гринвичской системе координат;  $x_p, y_p$  — координаты земного полюса.

Уравнения поправок в матричной форме, полученные на основе уравнения связи можно записать в виде:  $A\vec{X} + \vec{L} = \vec{V}$ ,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} \Delta X N_1 - \Delta Z L_1 & \Delta Z M_1 - \Delta Y N_1 \\ \vdots & \vdots \\ \Delta X N_n - \Delta Z L_n & \Delta Z M_n - \Delta Y N_n \end{pmatrix} \text{ — матрица коэффициентов}$$

перед неизвестными (элементами матрицы являются частные производные от измеренных величин  $c\tau$  по неизвестным);  $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$  — вектор-

$$\text{столбец неизвестных; } \vec{L} = \begin{pmatrix} c\tau_1^{(c)} - c\tau_1^{(o)} \\ \vdots \\ c\tau_n^{(c)} - c\tau_n^{(o)} \end{pmatrix} \text{ — вектор-столбец свободных}$$

членов (элементы — разности между счислимыми и измеренными величинами),  $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  — вектор-столбец поправок в измеренные величины.

Система нормальных уравнений, соответствующая системе уравнений поправок в случае равноточных измерений будет иметь вид:  $A^T A \vec{X} + A^T \vec{L} = 0$ .

Тогда решение получается в виде:  $\vec{X} = -(A^T A)^{-1} A^T \vec{L}$ .

Оценка точности:

$\mu = \sqrt{\frac{\vec{V}^T \vec{V}}{n-2}}$  — средняя квадратическая погрешность единицы веса;

$Q = (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$  — обратная матрица;

$m_{xp} = \mu \sqrt{q_{11}}$ ,  $m_{yp} = \mu \sqrt{q_{22}}$  — средние квадратические погрешности определяемых неизвестных.

#### Исходные данные. Координаты радиотелескопов

Станция	X, м	Y, м	Z, м
Сьерра Негра, Мексика	-630374,17	-5997609,56	2076517,97
Грин Бэнк, США	1030564,74	-4848425,92	4013891,04
Зеленчукская, Россия	3411526,14	3181299,59	4349878,29
Пушино, Россия	2921687,03	2201649,10	5224663,14
Паркес, Австралия	-4532455,87	2723374,24	-3566608,39

#### Измеренные линейные задержки в метрах

№	$ct^{(0)}$ , м			
	Сьерра–Негра – Паркес	Сьерра–Негра – Зеленчукская	Сьерра–Негра – Грин Бэнк	Сьерра–Негра – Пушино
1	199085,214	3355773,284	2074764,370	4285791,769
2	1450542,436	2895389,356	1513469,163	3318009,440
3	2328407,268	3515672,662	190182,763	3360596,411
4	1014370,157	3329319,258	-437166,199	3396670,216
5	2121237,462	3012146,274	-550254,435	3425134,710
6	-149170,167	-1023418,565	793342,663	3445125,085
7	13625,408	991859,790	-567098,271	3608417,196
8	-1307060,055	-3617796,082	669659,990	1222249,700
9	-2216563,294	629019,642	1692952,195	-1733444,665
10	-2683324,105	3663900,195	2410747,150	-3575052,394
11	-84528,797	3216763,450	1810250,515	2842909,410
12	345464,241	2963315,053	1170094,606	-3571667,483
13	10383,059	3382675,333	492813,680	-3047437,492
14	-767203,563	3175611,840	-9371,259	-1267759,428
15	-1599195,648	2919954,749	-534769,000	-43945,675
16	-1169848,614	3042,432	833073,023	990074,624

17	-3308482,386	-3234187,646	1174981,579	1775797,374
18	-1351764,456	-3157028,968	2147313,019	2497996,196
19	-1628084,697	1460345,479	2324159,267	3106359,682
20	-1021922,918	3145378,510	2255885,470	4001289,152

**Сферические координаты квазаров в градусах**

№	Сьерра-Негра – Грин Бэнк		Сьерра-Негра – Зеленчукская		Сьерра-Негра – Пушино		Сьерра-Негра – Паркес	
	γ	δ	γ	δ	γ	δ	γ	δ
1	0°	85°	0°	73°	0°	67°	180°	33°
2	190	78	40	86	10	88	185	16
3	210	50	5	74	20	88	190	0
4	230	36	15	80	30	88	195	5
5	260	23	35	85	40	88	200	-15
6	200	62	305	56	50	88	205	0
7	240	31	325	60	60	87	210	-10
8	280	42	280	50	245	78	215	-5
9	320	42	320	61	250	60	220	-4
10	350	55	355	57	255	48	230	-14
11	185	86	20	82	260	88	260	-54
12	195	70	60	86	270	45	270	-59
13	205	56	10	78	280	45	265	-56
14	215	46	25	83	290	54	255	-48
15	255	26	45	86	300	59	245	-37
16	295	35	315	58	310	63	235	-32
17	305	37	260	58	320	65	225	-1
18	335	51	290	48	330	67	240	-35
19	345	62	330	61	340	67	250	-40
20	355	76	350	61	355	67	252	-45

**Формирование варианта задания.** Базой РСДБ будет Сьерра Негра – Грин Бэнк, если день рождения студента приходится на первый квартал (с января по март); базой РСДБ будет Сьерра Негра – Зеленчукская, если день рождения студента приходится на второй квартал (с апреля по июнь); базой РСДБ будет Сьерра Негра – Пушино, если день рождения студента приходится на третий квартал (с июля по сентябрь); базой РСДБ будет Сьерра Негра – Паркес, если день рождения студента



приходится на четвёртый квартал (с октября по декабрь). Координаты пунктов, образующих базу РСДБ выбираются из таблицы «*Координаты радиотелескопов*»

Результаты измерений и координаты квазаров студент выбирает из соответствующих строк и столбцов таблиц «*Измеренные линейные задержки в метрах*» и «*Сферические координаты квазаров в градусах*». Номера строк для своего варианта студент выбирает из таблицы по номеру месяца своего рождения.

Номера месяца	Номера строк
1	1, 2, 3, 4, 5, 6
2	6, 7, 8, 9, 10, 11
3	11, 12, 13, 14, 15, 16
4	1, 16, 17, 18, 19, 20
5	1, 3, 5, 7, 9, 11
6	2, 11, 13, 15, 17, 19
7	2, 5, 8, 11, 14, 17
8	1, 4, 8, 12, 16, 20
9	1, 3, 4, 12, 17, 20
10	4, 6, 7, 8, 9, 16
11	10, 12, 13, 15, 16, 19
12	1, 2, 16, 17, 18, 20

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.И. Крылов*. Космическая геодезия: Учебное пособие – М.: УПП «Репрография» МИИГАиК, 2002.— 168 с.
2. *В.И. Крылов*. Координатно-временные преобразования в геодезии: Учебное пособие – М.: Изд-во МИИГАиК, 2014.— 90 с.
3. *В.И. Крылов*. Основы теории движения ИСЗ (часть первая: невозмущённое движение): учебное пособие. – М.: МИИГАиК, 2015.—52 с.
4. *В.И. Крылов*. Основы теории движения ИСЗ (часть вторая: возмущённое движение): учебное пособие – М.: МИИГАиК, 2016.— 67 с.
5. *Космическая геодезия*. Учебник для вузов /В.Н. Баранов, Е.Г. Бойко, И.И. Краснорылов и др. – М.: Недра, 1986.
6. *В.К. Абалакин, Е.П. Аксёнов, Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов*. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	3
<b>Содержание (программа) дисциплины</b> «Космическая геодезия и геодинамика» .....	4
<b>Задание № 1.</b> Вычисление средних геоцентрических координат ИСЗ в системе координат стандартной эпохи по его истинным топоцентрическим координатам, заданным в системе координат эпохи наблюдения.....	6
<b>Задание № 2.</b> Вычисление элементов невозмущённой орбиты по наблюдениям спутника с пункта земной поверхности.....	11
<b>Задание № 3.</b> Вычисление невозмущённой эфемериды ИСЗ.....	17
<b>Задание № 4.</b> Вычисление элементов орбиты ИСЗ по его координатам и составляющим скорости движения в момент ( $t$ ).....	19
<b>Задание № 5.</b> Вычисление ориентирующих углов земной хорды по наблюдениям спутника с двух пунктов земной поверхности.....	22
<b>Задание № 6.</b> Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений возмущённого движения ИСЗ .....	26
<b>Задание № 7.</b> Вычисление координат земного полюса по наблюдениям квазаров.....	30
<b>Список литературы</b> .....	34

*Внутривузовское издание*

Подписано в печать 27.04.2017. Гарнитура Таймс  
Формат 60×90/16 Бумага офсетная  
Объем 2,5 усл. печ. л  
Тираж 10 экз. Заказ № 21

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК