

ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ММИГАИК

Программа составлена в соответствии с типовой программой по математике средней школы и состоит из двух разделов. Первый из них представляет собой перечень основных математических понятий и фактов, которыми должен владеть поступающий (уметь правильно их использовать и ссылаться на них при решении задач). Во втором разделе кратко перечислены основные математические умения и навыки, которыми должен владеть абитуриент.

1. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ, ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ

1.1. Арифметика, алгебра и начала анализа

1.1.1. Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Общий наибольший делитель. Общее наименьшее кратное. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

1.1.2. Пропорции, основное свойство пропорции.

1.1.3. Целые числа (Z). Рациональные числа (Q). Иррациональные числа. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей, геометрическая интерпретация действительных чисел. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

1.1.4. Числовые выражения, выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.

1.1.5. Свойства числовых неравенств.

1.1.6. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.

1.1.7. Логарифмы, основное логарифмическое тождество. Логарифм произведения, частного, степени. Формула перехода к другому основанию.

1.1.8. Одночлен и многочлен. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена.

1.1.9. Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.

1.1.10. Формула корней квадратного уравнения.

1.1.11. Теорема Виета для квадратного уравнения. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

1.1.12. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность. Графики функций.

1.1.13. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1.1.14. Определение, основные свойства и графики функций: линейной $y = k \cdot x + b$; степенной $y = ax^n$, $n \in N$; обратно пропорциональной $y = \frac{k}{x}$; квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, показательной $y = a^x$; логарифмической $y = \log_a x$; арифметического корня $y = \sqrt{x}$.

1.1.15. График дробно-линейной функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

1.1.16. Определение, свойства и графики тригонометрических функций:
 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

1.1.17. Понятие $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

1.1.18. Решение базовых тригонометрических уравнений ($\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$) и уравнений, сводящихся к ним (с использованием материала, перечисленного в этой программе).

1.1.19. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух аргументов (формулы).

1.1.20. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

- 1.1.21. Тригонометрические функции двойного аргумента.
- 1.1.22. Тригонометрические функции половинного аргумента.
- 1.1.23. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.
- 1.1.24. Формулы приведения.
- 1.1.25. Преобразование произведений $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, $\sin \alpha \cdot \cos \beta$ и $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ в сумму и разность тригонометрических функций.
- 1.1.26. Преобразование выражений $\sin \alpha \pm \sin \beta$ и $\cos \alpha \pm \cos \beta$ в произведение.
- 1.1.27. Неравенства. Решение неравенства с одним неизвестным. Метод интервалов. Понятие о равносильных неравенствах.
- 1.1.28. Системы уравнений и неравенств. Совокупности уравнений и неравенств.
- 1.1.29. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Геометрическая интерпретация.
- 1.1.30. Понятие о производной. Ее физический и геометрический смысл. Уравнение касательной к кривой в заданной точке.
- 1.1.31. Производные функций $y = x^p, p \in R$; $y = a^x$; $y = \log_a x$,
 $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$;
- 1.1.32. Производные суммы, разности, произведения и частного от деления двух функций.
- 1.1.33. Арифметическая прогрессия. Формулы n -го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Выражение члена арифметической прогрессии через предыдущий и последующий члены.
- 1.1.34. Геометрическая прогрессия. Формулы n -го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии. Выражение члена геометрической прогрессии через предыдущий и последующий члены.

1.2. Геометрия.

- 1.2.1. Понятие аксиомы и теоремы.
- 1.2.2. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Угол между прямыми. Понятие скрещивающихся прямых. Окружность, круг. Параллельные прямые. Аксиома о параллельных прямых.
- 2.2.3. Признаки параллельности прямых.
- 1.2.4. Теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках.
- 2.2.5. Определение подобных многоугольников. Признаки подобия треугольников. Преобразование подобия и его свойства. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.
- 1.2.6. Симметрия относительно оси и относительно точки.
- 1.2.7. Многоугольники, выпуклые многоугольники, вершины, стороны, диагонали многоугольника.
- 1.2.8. Треугольник. Его медианы, биссектрисы, высоты. Виды треугольников. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Признаки равенства треугольников. Средняя линия треугольника и её свойства.
- 1.2.9. Определение равнобедренного треугольника и его свойства.
- 1.2.10. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.
- 1.2.11. Свойства точек, равноудаленных от сторон угла.
- 1.2.12. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов многоугольника.
- 1.2.13. Различные формулы площади треугольника (в том числе формулы, выражающие площадь треугольника через радиусы вписанной и описанной окружностей, и формула Герона).

- 1.2.14. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Свойство высоты, проведённой к гипотенузе в прямоугольном треугольнике.
- 1.2.15. Четырёхугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Формулы для их площадей.
- 1.2.16. Средняя линия трапеции и её свойства.
- 1.2.17. Свойства и признаки параллелограмма. Свойства ромба.
- 1.2.18. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус, касательная к окружности и её свойство. Дуга окружности. Сектор, сегмент. Свойство пересекающихся хорд. Свойство касательных и секущих, проведённых из одной точки.
- 1.2.19. Теорема о существовании окружности, описанной около треугольника.
- 1.2.20. Теорема о существовании окружности, вписанной в треугольник.
- 1.2.21. Длина окружности и длина дуги окружности. Центральный угол и его измерение. Градусная и радианная меры угла. Площадь круга и площадь сектора.
- 1.2.22. Измерение угла, вписанного в окружность.
- 1.2.23. Теорема синусов.
- 1.2.24. Теорема косинусов.
- 1.2.25. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.
- 1.2.26. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.
- 1.2.27. Параллельность прямой и плоскости.
- 1.2.28. Признак параллельности прямой и плоскости.
- 1.2.29. Признак параллельности плоскостей.
- 1.2.30. Определение перпендикулярности прямой и плоскости. Признак перпендикулярности.
- 1.2.31. Теорема о трёх перпендикулярах.
- 1.2.32. Определение перпендикулярности двух плоскостей. Признак перпендикулярности.
- 1.2.33. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.
- 1.2.34. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Угол между плоскостями.
- 1.2.35. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамида, усеченная пирамида. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды; их виды.
- 1.2.36. Фигуры вращения: цилиндр, конус, усеченный конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.
- 1.2.37. Формула объема параллелепипеда.
- 1.2.38. Формулы площади поверхности и объема призмы, пирамиды, цилиндра, конуса.
- 1.2.39. Формулы объема шара и площади сферы.
- 1.2.40. Векторы, сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Действия над векторами в координатной форме. Длина вектора. Коллинеарные и компланарные векторы. Признак коллинеарности векторов. Скалярное произведение двух векторов. Признак перпендикулярности двух векторов. Вычисление угла между двумя векторами.

2. ОСНОВНЫЕ УМЕНИЯ И НАВЫКИ

Абитуриент должен иметь навыки применения материала, указанного в разделе 1, для решения практических задач. В частности, он должен уметь:

2.1. Выполнять алгебраические действия с рациональными и иррациональными числами; округлять результаты вычислений с требуемой точностью.

2.2. Выполнять тождественные преобразования выражений, содержащих элементарные функции (в частности, использовать формулы сокращённого умножения, выделять полный квадрат, выделять целую часть в рациональной дроби). Выполнять деление многочлена на многочлен.

2.3. Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости.

2.4. Строить графики элементарных функций и функций, содержащих модуль переменной. По графику функции $f(x)$ строить графики функций: $f(x) + A$, $f(x - c)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $k \cdot f(x)$, $f(k \cdot x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$.

2.5. Решать уравнения и неравенства следующих типов: линейные, квадратные и к ним приводящиеся; рациональные, иррациональные; тригонометрические; показательные и логарифмические; с модулем; с параметром.

2.6. Решать системы и совокупности уравнений и неравенств.

2.7. Решать задачи, связанные с арифметическими и геометрическими прогрессиями.

2.8. Выполнять линейные операции над векторами графически и в координатной форме, вычислять модуль вектора и угол между векторами.

2.9. Решать геометрические задачи, связанные с понятиями, аксиомами и теоремами, перечисленными в разделе 1.

2.10. Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии — при решении геометрических задач.

2.11. Пользоваться понятием производной при исследовании функций и при построении графиков функций.

2.12. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений.

2.13. Ясно излагать логику решения задач в устной и письменной формах с использованием математической символики.

* * *

Вариант № 0

Задание А1.

Выражение $\left(x - \frac{5x}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{-1}$ после упрощения примет вид

- 1) $\frac{1}{x}$ 2) x 3) $3x$ 4) $\frac{3}{x}$ 5) $\frac{1}{3x}$
-

Задание А2.

Остаток от деления многочлена $-2x^3 + 6x^2 - 3$ на двучлен $x + 2$ равен

- 1) 27 2) 37 3) 47 4) 57 5) 67
-

Задание А3.

Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $\frac{x^4 - 256}{16 - x^2} = 14x + 24$

- 1) $(-18; -15)$ 2) $(-15; -13)$ 3) $(-12; -9)$ 4) $(-8; 7)$ 5) $(7; 12)$
-

Задание А4.

5 шоколадок "Маринка" и 7 шоколадок "Полинка" стоят вместе 258 рублей, а 9 шоколадок "Маринка" и 2 шоколадки "Полинка" стоят 210 рублей. Сколько рублей стоят вместе 2 шоколадки "Маринка" и 1 шоколадка "Полинка"?

- 1) 60 2) 59 3) 58 4) 57 5) 56
-

Задание А5.

Выражение $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$ после упрощения примет вид

- 1) $2\cos \alpha$ 2) $\frac{2}{\sin \alpha}$ 3) $2\sin \alpha$ 4) $\frac{2}{\cos \alpha}$ 5) $\operatorname{tg} \alpha$
-

Задание А6.

Решите графически уравнение $\log_3(x+2) = -2x - 1$. Укажите промежуток, в котором находится его корень

- 1) $(-2; -1)$ 2) $(-1; 0)$ 3) $(0; 1)$ 4) $(1; 2)$ 5) $(2; 3)$
-

Задание А7.

Найдите сумму корней или корень, если он единственный, уравнения $x - 20 = \sqrt{x}$

- 1) 16 2) 41 3) 36 4) 25 5) 49
-

Задание А8.

Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $\log_8 \frac{2-3x}{x-4} = \frac{1}{3}$

- 1) $(1, 1; 2, 2)$ 2) $(2, 1; 3, 1)$ 3) $(3, 1; 4, 1)$ 4) $(4, 1; 5, 1)$ 5) $(5, 1; 6, 1)$
-

Задание А9.

Количество целых решений неравенства $x^3|x^2 - 9| \leq 0$ на промежутке $[-4; 4]$ равно

- 1) 6 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5
-

Задание А10.

Найдите абсциссу точки графика функции $y = 5x^2 - 11x + 8$, в которой касательная образует с осью OX угол $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

- 1) 1,0 2) -1,0 3) 1,2 4) -1,2 5) 2,0
-

Задание А11.

Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$, если ее производная $f'(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$.
(Области определения функций $f(x)$ и $f'(x)$ совпадают.)

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5
-

Задание А12.

Уравнение геометрического места точек на плоскости OXY , равноудаленных от точек $A(7; 8)$ и $B(5; 6)$, имеет вид

- 1) $x + 2y + 13 = 0$ 2) $x - y - 13 = 0$ 3) $x - y + 13 = 0$
4) $x + y - 13 = 0$ 5) $2x + y - 13 = 0$
-

Задание А13.

Даны векторы $\vec{a}(-3; 1)$, $\vec{b}(4; 5)$, $\vec{c}(-22; 10)$. Если вектор $(\vec{a} + k\vec{b})$ перпендикулярен вектору \vec{c} , то k равно

- 1) -2 2) 2 3) 3 4) 4 5) -4
-

Задание А14.

Укажите все значения параметра a , при которых уравнение $|2|x| - 5| = 5 - a$ имеет 1, 2 или 3 корня

- 1) $\{5\}$ 2) $\{0; 5\}$ 3) $(-\infty; 5] \cup \{6\}$ 4) $(-\infty; 0]$ 5) $(-\infty; 0] \cup \{5\}$
-

Задание Б1.

Найдите (в градусах) сумму корней уравнения $\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$, принадлежащих промежутку $[-180^\circ; 270^\circ]$

Задание Б2.

Найдите сумму значений t или значение t , если оно единственное, при котором числа $2; t - 3; 22 - 2t$ являются тремя последовательными членами знаменательной геометрической прогрессии

Задание Б3.

Найдите наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству $\log_2\left(4 - \frac{x}{2}\right) < \log_2 8$

Задание Б4.

Если x_0 - корень уравнения $\sqrt{5^{x_0} \cdot 7^{x_0}} = 35$, то значение $2x_0 + 1$ равно

Задание Б5.

В треугольнике высота, равная 12 см, делит пополам сторону, равную 18 см. Найдите (в см) длину периметра треугольника

Задание Б6.

Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ с вершинами в точках $A(4; 3)$, $B(10; -1)$, $C(8; -7)$, $D(1; -1)$

Ответы

- A1) 2 A2) 2 A3) 3 A4) 1 A5) 2 A6) 2 A7) 4 A8) 1 A9) 1 A10) 1 A11) 3 A12) 4
A13) 2 A14) 5 B1) 90 B2) -5 B3) 7 B4) 5 B5) 48 B6) 45